S3	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Bojanja i popločavanja

Ivan Sinčić

19.10.2019.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Mnogi kombinatorni zadaci sastoje se od nekakve igre ili pitanja koja u sebi sadrže šahovsku ili nekakvu drugu ploču. Standardne ideje za takvu vrstu zadataka uključuju traženje invarijante (veličine koja se ne mijenja pri prelasku iz jednog stanja u drugo) ili monovarijante (veličina koja je ili rastuća ili padajuća kod prelaska iz jednog stanja u drugo), matematičku indukciju, konstrukciju situacije opisane u zadatku ili bojanje ploče koje implicira da je tvrdnja zadatka nemoguća. Ove tehnike potrebno je primijeniti u sljedećim zadacima.

Zadaci

1. Je li moguće ploču 10×10 popločati pravokutnicima dimenzija 1×4?
2. Na ploči 10×10 u nekim kvadratima je korov. Korov će se proširiti na neki kvadrat ako je prethodno korov bio u bar dva susjedna kvadrata (dva kvadrata su susjedna ako imaju zajedničku stranicu). Koji je minimalan broj početnih kvadrata s korovom tako da se korov proširi na sve kvadrate ploče?
3. Dokaži da ako maknemo bilo koje polje ploče $2^n \times 2^n$, ostatak je moguće prekriti s L-triominama (domina od 3 polja u obliku slova L, dopušteno ju je reflektirati i rotirati).
4. a) Dokaži da skakač (skačući po pravilima kao šahovska figura) ne može obići svako polje ploče $(2m+1) \times (2n+1)$ i vratiti se na početno polje.
   b) Može li skakač obići svako polje ploče 4×8 točno jednom i vratiti se na početno polje?
5. Može li se šahovska ploča od koje je izrezano jedno kutno polje pokriti pravokutnim pločicama dimenzija 1×3?
6. Ploča 8×8 obojana je crno-bijelo kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i u svakom od 8 polja u tom retku/stupcu promijeniti boje iz crne u bijelu i obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?
7. Na po volji velikoj kvadratnoj ploči postavljeno je 9 žetona u polja kvadrata 3×3. U svakom koraku dozvoljeno je s jednim žetonom skočiti u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko jednog zauzetog polja na slobodno polje i pritom žeton koji je prekočen uklanjamo. Može li ova "igra" završiti sa samo jednim žetonom na ploči?
8. Ploča dimenzija $m \times n$ šahovski je ispunjena slovima A i B. Dozvoljena je sljedeća transformacija: odaberemo dva susjedna polja i u njima svako slovo A zamijenimo s B, svako B sa C i svako C s A. Odredite nužne i dovoljne uvjete na m i n tako da je iz početne pozicije moguće doći u onu gdje su A i B zamijenjeni.
9. (Državno 2016. 3. razred) Dana je ploča s 2016 redaka i 2017 stupaca. Je li moguće ukloniti dva polja u zadnjeg stupcu te ploče tako da dobiveno ploču možemo prekriti bez preklapanja pločicama oblika pravokutnika (1×5) i plusa (sastavljenog od 5 polja)? Pločice je dozvoljeno rotirati.
10. Je li moguće upisati sve pozitivne racionalne brojeve u "četvrtinu" beskonačne šahovske ploče tako da se svaki broj pojavljuje točno jednom te da je zbroj brojeva u svakom retku i stupcu konačan?
11. Polja jedinične kvadratne mreže velikih dimenzija obojana su naizmjenično crno i bijelo, poput šahovske ploče. Iz te mreže izrezan je poligon čije stranice leže na linijama kvadratne mreže. Neka se taj poligon sastoji od B bijelih i C crnih polja, a njegov rub od b bijelih i c crnih jediničnih dužina. Dokaži da vrijedi $c - b = 4(C - B)$.

12. (JBMO shortlist 2018.) Na početku igre sva polja 8×8 ploče su bijela. Katja i Josip igraju igru. Prvo Katja oboji n polja u crveno. Potom Josip odabere 4 reda i 4 stupca ploče te oboji sva polja u njima u crnu boju. Katja pobjeđuje ako nakon Josipovog bojanja na ploči ostane neko polje crvene boje. Nađi najmanji n takav da Katja pobjeđuje neovisno o tome kako Josip igra.

13. (Benelux 2019.) Pijuni i topovi postavljeni su na šahovsku ploču dimenzija 2019×2019 tako da je na svakom polju najviše jedna figura. Pijun može vidjeti drugog pijuna ako se nalaze u istom retku ili stupcu te su sva polja između njih prazna. Nađi najveći broj p takav da se na ploču mogu postaviti p pijuna i $p + 2019$ topova tako da se nikoja dva pijuna međusobno ne vide.

14. (MEMO 2013.) Neka je n prirodan broj. Na ploču dimenzija $4n \times 4n$ postavljeno je $4n$ kamenčića tako da se u svakom retku i svakom stupcu nalazi točno jedan kamenčić. U svakom potezu, jedan kamenčić se horizontalno ili vertikalno pomakne na susjedno polje. Više kamenčića se može nalaziti na istom polju. Cilj igre je kamenčićima zauzeti sva polja jedne od dvije dijagonale ploče. Odredi najmanji broj $k(n)$ takav da se za bilo koji početni raspored kamenčića igra može završiti u najviše $k(n)$ poteza.