S5	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Euklidova fora, polinomi i ostalo

Ivan Novak

2.11.2019.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

1 Euklidova fora

Mnogi od vas upoznati su s Euklidovim dokazom da postoji beskonačno prostih brojeva.

Pretpostavimo da ih je konačno, neka je P njihov umnožak, promotrimo $P+1$, to je prirodan broj veći od 1, pa ima prost faktor p, ali onda $p \mid P$ i $p \mid P+1$, pa $p \mid 1$, što je nemoguće. Dakle, postoji beskonačno prostih brojeva.

U ovom ćemo se predavanju baviti zadacima u kojima su korisne varijacije ideja iz ovog dokaza. Započnimo s jako sličnim problemom:

- ⋆ Dokaži da postoji beskonačno prostih brojeva koji daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4, i beskonačno brojeva koji daju ostatak 3 pri dijeljenju s 4.

Rješenje: Pretpostavimo da ima konačno prostih brojeva kongruentnih s 3 mod 4, neka je P njihov umnožak. Promotrimo $4P-1$, on mora imati prosti faktor koji je kongruentan s 3 mod 4, ali niti jedan prosti faktor od $4P-1$ ne dijeli P, dakle kontradikcija.

Za drugi dio, pretpostavimo da ima konačno prostih brojeva kongruentnih s 1 mod 4, neka je P njihov umnožak. Promotrimo P^2+1, on mora imati prosti faktor koji je kongruentan s 1 mod 4, ali niti jedan prosti faktor od P^2+1 ne dijeli P, dakle kontradikcija.

Poopćenje ovih zadataka koje kaže da za svaka 2 relativno prosta prirodna broja a i b postoji beskonačno prostih brojeva koji daju ostatak a pri dijeljenju s b zove se **Dirichletov teorem** (ne može ga se dokazati ovom metodom).

Dirichletov teorem kaže da svaki linearan polinom $P(x) = ax + b$, gdje su a i b relativno prosti cijeli brojevi, poprima beskonačno prostih vrijednosti kako x varira po skupu prirodnih brojeva.

Prirodno je pitanje vrijedi li isto i za polinome višeg stupnja (za koje ne postoji prost broj koji im dijeli sve vrijednosti); to se zove *slutnja Bunjakovskog* i nije dokazana ni za koji polinom stupnja većeg od 1. Međutim, dokazan je slabiji rezultat, **Schurov teorem**, koji je naš sljedeći zadatak:

- ⋆ Neka je P nekonstantan polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Neka je S skup svih prostih brojeva koji dijele $P(k)$ za neki prirodan broj k. Tada je S beskonačan.

Ideja koja je zajednička svim primjerima je promatranje nekog velikog umnoška (isto tako možemo promatrati i velike zbrojeve), odnosno nečeg "globalnog", dok nam neki "lokalni" pokušaji ne bi puno pomogli.

2 $x - y \mid P(x) - P(y)$

Za svaki polinom s cjelobrojnim koeficijentima P i za svaka dva cijela broja x i y vrijedi da $x-y$ dijeli $P(x)-P(y)$.

Dokaz: Neka je $P(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$, tada je

$$P(x) - P(y) = a_n(x^n - y^n) + \ldots + a_1(x - y),$$

a kako $x - y$ dijeli $x^k - y^k$ za svaki k, dijeli svaki od pribrojnika, pa dijeli i cijeli izraz.

Zadaci

I) Na ploči su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 2018 u nekom redoslijedu. Svakom od brojeva na ploči je dodan njihov redni broj u tom nizu. Dokaži da u dobivenom nizu postoje dva broja čija je razlika djeljiva s 2018.

II) Neka je n prirodan broj. Neka polja $2n+1 \times 2n+1$ tablice obojana su bijelo, a ostala su obojana crno. Dokaži da je moguće ukloniti jedan redak i jedan stupac tako da u ostatku tablice nema jednako mnogo bijelih polja i crnih polja.

III) Dokaži da za svaki polinom s cjelobrojnim koeficijentima P i za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj x takav da je $P(x)$ prirodan broj djeljiv s barem n različitih prostih brojeva.

IV) Postoje li polinomi s cjelobrojnim koeficijentima za koje vrijedi $P(2019) = 2019^{2019}$, $P(2019^{2019}) = 300000$, $P(300000) = 2019$?

V) Odredi sve polinome s nenegativnim cjelobrojnim koeficijentima P za koje postoji prirodan broj x takav da je $P(x + P(x))$ prost broj.

VI) Neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima stupnja n i neka je k prirodan broj.
Neka je $Q = P^k = P \circ P \circ \ldots P$ (kompozicija P samog sa sobom k puta). Dokaži da $Q(t) = t$ ne može vrijediti za više od n cijelih brojeva t.

VII) Neka je $\mathbb{Z}[x]$ skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Odredi sve funkcije $\theta : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ takve da za svaka dva polinoma $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ vrijedi

- $\theta(p + 1) = \theta(p) + 1$,
- ako $\theta(p) \neq 0$, tada $\theta(p)$ dijeli $\theta(p \cdot q)$.

Teški zadaci (poredani su po abecedi)

1. Dokaži da postoji beskonačno prirodnih brojeva n takvih da je najveći prosti faktor od n^2+1 manji od $n\pi^{-2019}$.

2. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji n prirodnih brojeva $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ za koje vrijedi
$$\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \ldots > \varphi(a_n).$$

3. Odredi postoji li beskonačan niz znamenaka u bazi 10 različitih od nule $a_1, a_2, a_3, \ldots$ i prirodan broj N takvi da za svaki $k > N$, broj $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ je potpun kvadrat.

4. Odredi sve realne brojeve c za koje postoji strogo rastući niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da za svaki prirodan broj n vrijedi
$$a_{2n} + a_{2n-1} = ca_n.$$