Tetivni četverokuti

Tadej Petar Tukara

26.10.2019.

Uvod

Cetverokut kojem se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut. Drugim riječima, tetivni četverokuti su konveksni četverokuti čija sva četiri vrha leže na istoj kružnici, tj. njihove stranice ujedno su tetive iste kružnice. Tetivni četverokuti su najvažniji geometrijski oblik s kojim ćete se upoznati u srednjoj školi. Za rješavanje geometrijskih zadataka na natjecanjima treba se upoznati sa svojstvima tetivnih četverokuta i naučiti kako se koriste.

Lakši zadaci

1. Neka je I središte opisane kružnice trokutu ABC te neka su D i E nožišta visina iz I na stranice BC i AC. Dokažite da je četverokut $IDCE$ tetivan i odredite gdje mu se nalazi središte opisane kružnice.
2. Neka je dan trokut ABC i tangenta na njegovu opisanu kružnicu u točki B. Dokažite da je kut između tetive BC i tangente jednak obodnom kutu $\measuredangle BAC$
3. Neka je $ABCD$ trapez. Dokažite da je $ABCD$ tetivni četverokut ako i samo ako je $ABCD$ jednakokračan trapez.
4. Unutarnje simetrale kuteva nekog četverokuta sijeku se u točkama A, B, C i D. Dokažite da je $ABCD$ tetivan četverokut.

Umjereni zadaci

5. Dokaži da se simetrala kuta kod vrha A i simetrala stranice BC sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC. Vrijedi li isto za simetralu vanjskog kuta?
6. H je ortocentar trokuta ABC. Dokažite da osnosimetrične slike točke H obzirom na stranice trokuta i njene centralnosimetrične slike obzirom na polovišta stranica leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
7. *(Feuerbachova kružnica)* Dokažite da polovišta stranica i nožišta visina trokuta ABC leže na kružnici.
8. *(Simsonov pravac)* P je neka točka na opisanoj kružnici trokuta ABC različita od A, B i C. D, E I F su nožišta visina iz P na pravce na kojima leže stranice trokuta ABC. Dokažite da točke D, E i F leže na pravcu

Teži zadaci

9. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice AB i AC u točkama E i F. Neka je P sjecište pravca EF i simetrale kuta ABC. Dokažite da je $\measuredangle BPC = 90°$
10. U šiljastokutnom trokutu ABC, BH je nožište visine iz vrha B. Točke D i E su polovišta $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom. Neka je F osnosimetrična slika H preko ED. Dokažite da pravac BF prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta ABC.
11. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut u kojem je $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ i $\angle ABC > \angle CDA$. Dane su točke Q i R be na stranicama BC i CD, redom, tako da pravac QR siječe pravce AB i AD u točkama P i S, redom, te vrijedi da je $PQ = RS$. Neka je M polovište $\overline{BC}$ i N polovište $\overline{QR}$. Dokažite da točke M, N, A i C leže na kružnici.
12. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Neka je E sjecište pravaca paralelnih s AC i BD koji prolaze točkama B i A, redom. Pravci EC i ED presijecalu opisanu kružnicu trokuta AEB ponovno u točkama F i G, redom. Dokažite da točke C, D, F, i G leže na kružnici.