

Uvod

Matematička indukcija je metoda matematičkog dokazivanja. Treba dokazati da neka tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$ vrijedi za sve prirodne brojeve n . U tu svrhu, prema principu matematičke indukcije, dovoljno je napraviti sljedeća tri koraka:

- (i) baza indukcije ($n = 1$): Pokazati da tvrdnja vrijedi za $n = 1$,
- (ii) induktivna pretpostavka ($n = k$): Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj k ,
- (iii) korak indukcije ($n = k + 1$): Koristeći induktivnu pretpostavku treba pokazati da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k + 1$.

Tada ta tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zagrijavanje

1. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
2. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. Dokažite da je $n < 2^n$ za svaki prirodan broj n .

Lakši zadaci

4. Dokažite da je broj dijagonala pravilnog n -terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$
5. U nogometnom prvenstvu sudjeluje n timova i svatko igra protiv svakog točno jednom. Dokažite da je ukupno odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ utakmica.
6. Dokažite da za svaki prirodan broj n $11|23^n - 1$
7. Dokaži da je za svaki prirodni broj n , broj $\underbrace{222 \dots 2}_n - 3^n + 1$ djeljiv brojem 7.
8. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn na više.

Umjereni zadaci

9. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \leq \frac{n^2+3n}{4}$
10. U ravnini je nartano n kružnica (proizvoljnij polumjera i u proizvoljnom međusobnom položaju). Dokažite da se tako dobivena karta može obojati dvjema različitim bojama tako da su svaka dva susjedna polja obojana različitim bojama.
11. Dokažite da je $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ za sve prirodne brojeve n .
12. Ako je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj, pokažite da je $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Teži zadaci

13. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, takve da je $f(x+y) = f(x) + f(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{Z}$
14. U ravnini je dano n pravaca u općem položaju, tj. nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom. Dokažite da oni dijele ravninu na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ dijelova.
15. Može li se ploča 3X2019 popločati L triominama (pločicama od 3 kvadratića u obliku slova L)?
16. U nekoj su državi svaka dva grada povezana jednosmjernim putem. Dokažite da postoji grad iz kojeg možemo poći i obići sve druge gradove, ali tako da svaki od njih posjetimo samo jednom.
17. Na kružnoj automobilskoj stazi nalazi se n jednakih automobila. U rezervoarima tih automobila nalazi se gorivo (moguće je da su neki rezervoari prazni). Kad bi se gorivo iz svih automobila prelilo u jedan automobil, on bi imao dovoljno goriva da obiđe čitavu stazu. Dokažite da postoji automobil na stazi koji može obići čitavu stazu ako došavši do nekog automobila pretoči gorivo iz tog automobila u svoj rezervoar.

Hintovi

1. klasična matematička indukcija
2. klasična matematička indukcija
3. Poveznica između 2^{n+1} i 2^n
4. Koliko dijagonala možemo povući iz jednog vrha n -terokuta?
5. Ako u prvenstvo ubacimo dodatan tim, koliko se dodatnih utakmica odigra?
6. $23^{n+1} = 23 * 23^n = 22 * 23^n + 23^n$
7. Ako označimo s $A_n = \underbrace{2 \dots 2}_n - 3^n + 1$, pokušajte pronaći rekurzivnu relaciju koja povezuje A_n i A_{n+1} te ju iskoristiti u koraku indukcije.
8. Napišite n u oblika $3a + 5b$ i promatrajte kako možete zapisati $n + 1$
9. U koraku prvih n pribrojnika zamjenite sa desnom stranom
10. Kako ćemo bojati novododanu kružnicu?
11. Niz zapišimo rekurzivno u obliku: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
12. Promotrite $(x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n}) = \dots$
13. Uvrstimo $x = y = 0$ da dobijemo $f(0) = 2f(0)$, pa dobivamo $f(0) = 0$. Neka je $f(1) = c$.
14. Prilikom koraka indukcije imamo n pravaca i njih siječe $n + 1$. pravac i time dobivamo n novih točaka i time $n + 1$ dijelova na $n + 1$. pravcu koji pak ravnini daju koliko novih dijelova?
15. Probajte popločati ploče malih dimenzija i iz toga izvući zaključak
16. Probajte konstruirati poredak gradova da se zadani put može izvršiti.
17. Može li jedan sigurno doći do idućeg automobila? Zamjenite dva automobila i promatrajte ih kao jednog.

Rješenja

1. [klasika](#)
2. [klasika](#)
3. [MNM online predavanja](#)
4. [MNM online predavanja](#)

5. Po pretpostavci indukcije se u prvenstvu u kojem sudjeluje n timova odigra $\frac{n(n-1)}{2}$ utakmica. Ako dodamo jedan tim odigra se dodatnih n utakmica (mora odigrati sa svakim jednom). Time dolazimo do traženog rezultata.
6. $23^{n+1} - 1 = 23 * 23^n - 1 = 22 * 23^n + 23^n - 1$ što je djeljivo s 11 po pretpostavci indukcije.
7. Školsko 2019., 4. razred.
8. elementarna matematika 1
9. elementarna matematika 1
10. elementarna matematika 1
11. elementarna matematika 1
12. *Skica rješenja:* U koraku indukcije, primijetimo da vrijedi jednakost $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n}) - x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}}$, pa korištenjem jake indukcije imamo $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ iz čega lako slijedi $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.
13. Izvor.
14. Neka a_n označava broj dijelova na koje ravninu podijeli n pravaca u općem položaju. U koraku indukcije, skicom lako primijetimo da je odgovor na pitanje iz hinta $n + 1$, jer jedan odsječak $n + 1$. pravca daje jedan novi dio ravnine; stoga je $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$, iz čega lako slijedi korak indukcije.
15. MNM online predavanja
16. MNM online predavanja
17. MNM online predavanja