S3	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Kolinearnost i konkurentnost

Nikola Šalgaj

26. listopada 2019.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Zadatci u kojima treba dokazati kolinearnost triju točaka, tj. treba pokazati da tri točke leže na istom pravcu znaju izazivati bojazan kod ljudi. Sa zadacima s konkurentnim pravcima, tj. tamo gdje treba dokazati da tri pravca prolaze istom točkom, bojazan je još veća. Kako pristupiti takvim zadatcima?
Srećom, ova dva problema često se mogu svesti i preformulirati u nešto jednostavnije i pristupačnije, a postoje i konkretni rezultati o kolinearnosti i konkurentnosti koji u određenim situacijama znaju biti vrlo korisni.

Nabrojimo samo za početak neke općenite i jednostavne ideje za pristup ovakvim zadatcima; ovdje ih stavljam samo zato da budu na jednom mjestu, najbolji način da ih se čovjek sjeti ili nauči je naravno kroz rješavanje zadataka.

Kako pokazati da točke A, B i C leže na istom pravcu?

- $\angle ABC = 180°$, ako je B "između" A i C
- $|AC| = |AB| + |BC|$, isto uz pretpostavku da je B "između" A i C
- $\angle DAB = \angle DAC$, ako je A "ispod" ili "iznad" B i C, gdje je D neka četvrta točka
- ne zvuči revolucionarno, ali je: pokazati da C leži na pravcu AB
- varijacija prethodne: ako je p neki pravac kroz A, i ako BC siječe p u A', pokazati da je $A = A'$ (npr. pokazati $|AA'| = 0$
- ako se pravci p i q sijeku u A, pokazati da su p, q i BC konkurentni, što nas navodi na pitanje:

Kako pokazati da pravci p, q i r prolaze istom točkom?
Pa, ako je T sjecište od p i q, pokazati da se T nalazi na pravcu r. Dokazivanje konkurentnosti možemo tako praktički svesti na dokazivanje kolinearnosti.

Uvodni zadatci

1. Neka je I središte upisane kružnice $\triangle ABC$, a M i N točke redom na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, takve da je $\angle ABI = \angle NIC$ i $\angle ACI = \angle MIB$. Dokažite da su M, I i N kolinearne.
2. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta $\triangle ABC$, a točke O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO i P polovište dužine $\overline{BC}$, dokažite da su točke T, H i P kolinearne.
3. Neka je $\triangle ABC$ s tupim kutom kod vrha B, neka su D i E polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom, F točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\angle BFE$ pravi, te točka G na dužini $\overline{DE}$ takva da je $\angle BGE$ pravi. Dokažite da točke A, F i G leže na istom pravcu ako i samo ako je $2|BF| = |CF|$.
4. Dokažite da se simetrale stranica $\triangle ABC$ sijeku u jednoj točki (središtu opisane kružnice).
5. Dokažite da se težišnice $\triangle ABC$ sijeku u jednoj točki (težištu).

Konkretniji rezultati

Iskažimo dva uistinu općenita i bitna rezultata:

Cevin Teorem Neka su A_1, B_1, C_1 točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Dokažite da su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 konkurentni ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$$

.

Menelajev teorem Neka su točke B_1 i C_1 na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka A_1 na produžetku stranice $\overline{BC}$, trokuta ABC. Točke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$$

.

Primijetimo da, koristeći navedene teoreme, u određenim situacijama možemo zaključiti da su pravci konkurentni (ili točke kolinearne) bez da išta znamo o sjecištu tih pravaca (odnosno o pravcu na kojem leže točke).
Također, primijetimo da izrazi izgledaju isto u oba teorema, no treba pripaziti - skice nisu!

Sljedeće dva rezultata nisu toliko općenita, međutim mogu se prikriveni pojaviti u zadacima i korisno ih je zapamtiti:

Teorem o Eulerovom pravcu Središte S opisane kružnice, težište T i ortocentar H proizvoljnog trokuta ABC su kolinearne točke. Pravac na kojem leže nazivamo **Eulerov pravac**.

Teorem o Simsonovom pravcu Dan je trokut ABC i proizvoljna točka P na njemu opisanoj kružnici. Označimo s A_1, B_1 i C_1 nožišta okomica iz P redom na pravce BC, AC i AB. Točke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne i leže na pravcu kojeg nazivamo **Simsonov pravac**.

Nadalje, ako imamo dvije kružnice k_1 i k_2 mogli bismo se pitati gdje su sve točke koje imaju jednaku potenciju s obzirom na kružnicu k_1 i kružnicu k_2. Odgovor je da se sve takve točke nalaze na pravcu koji se naziva **radikalna os** kružnica k_1 i k_2. Dapače, sve točke radikalne osi imaju jednaku potenciju s obzirom na k_1 i k_2. Radikalna os je okomita na pravac koji povezuje središta kružnica k_1 i k_2. Ako su A i B sjecišta (ne nužno različita) od k_1 i k_2, radikalna os prolazi kroz A i B. Vrijedi i sljedeći bitan teorem:

Teorem o radikalnom središtu Dane su tri kružnice k_1, k_2 i k_3 s nekolinearnim središtima. Tri radikalne osi parova tih kružnica sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo **radikalno središte** i ona je jedinstvena točka koja ima jednaku potenciju s obzirom na sve tri kružnice.

Konkretniji zadatci

6. Dokažite da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki koristeći Cevin teorem. Pokažite isto za simetrale kutova.

7. Neka je U središte upisane kružnice $\triangle ABC$. Neka su A_1, B_1 i C_1 nožišta okomica iz U redom na stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Dokažite da su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 konkurentni. Točka u kojoj se sijeku naziva se **Georgennova točka**.

8. Dokažite teorem o Simsonovom pravcu.

9. Točkom P dane kružnice k povucimo tri različite tetive $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$. Neka su k_1, k_2, k_3 kružnice kojima su redom $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ promjeri. Ako su D, E i F preostala sjecišta (jedno je uvijek točka T) redom kružnica k_2 i k_3, k_1 i k_3 te k_1 i k_2. Dokažite da točke D, E i F leže na jednom pravcu.

10. Neka su p i q paralelni pravci i k kružnica koja dira p u A i siječe q u B i C. Na pravcu p odabrana je točka T takva da pravci BT i CT sijeku k na kraćem luku AC u točkama K i L redom. Neka je M polovište dužine $\overline{AT}$. Dokažite da su točke K, L i M kolinearne.

11. Neka su k_1 i k_2 kružnice s promjerima $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$. Neka je T drugo sjecište kružnica k_1 i k_2. Neka je Q' drugo sjecište kružnice k_1 i pravca AQ, a P' drugo sjecište kružnice k_2 i pravca AP. Kružnica k_3 prolazi točkama T, P i P', a kružnica k_4 točkama T, Q i Q'. Ako je H drugo sjecište kružnica k_3 i k_4, dokažite da su točke A, T i H kolinearne.