

Karakteristične točke trokuta

22.11.2015.

Uvod/teorijske osnove

Uz trokut vežemo niz različitih točaka koje se obično definiraju kao sjecišta nekih posebnih pravaca povezanih s tim trokutom. U ovom ćemo predavanju posebnu pažnju posvetiti najpoznatijim karakterističnim točkama trokuta: središtima opisane i upisane kružnice, težištu i ortocentru. Pritom ćemo koristiti neke rezultate iz predavanja o sukladnosti i sličnosti pa preporučamo da ponovite činjenice obrađene u tom predavanju.

Sada ćemo pomoću sljedećih teorema definirati već spomenute karakteristične točke trokuta. Za početak,

Teorem 1. *Sve simetrane stranice trokuta prolaze istom točkom.*

Dokaz. Pogledajte ga [ovdje](#).

Točka u kojoj se te simetrane sijeku jest **središte opisane kružnice trokuta**. Uočite kako je ta točka jednako udaljena od svih vrhova trokuta.

Teorem 2. *Sve simetrane kutova trokuta prolaze istom točkom.*

Dokaz. Pogledajte ga [ovdje](#).

Točka u kojoj se sijeku simetrane kutova trokuta jest **središte upisane kružnice trokuta**. Uočite kako je ta točka jednako udaljena od svih stranica trokuta.

Prisjetimo se, **visina trokuta** je dužina koja spaja vrh trokuta s nasuprotnom stranicom i okomita je na tu stranicu.

Teorem 3. *Pravci na kojima leže visine trokuta prolaze istom točkom.*

Dokaz. Pogledajte ga [ovdje](#).

Točka u kojoj se ti pravci sijeku naziva se **ortocentar trokuta**.

Težišnica u trokutu jest dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice.

Teorem 4. *Sve težišnice trokuta prolaze istom točkom.*

Dokaz. Pogledajte ga [ovdje](#).

Ta se točka naziva **težište trokuta**. Uočite da smo u ovom dokazu između ostaloga pokazali i da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru 2:1 računajući od vrha trokuta.

Zadatci

Zadatak 1.

Trokut ABC je jednakokrani ($|AB| = |AC|$), a točka D je na onom luku \widehat{BC} trokutu opisane kružnice koji ne sadrži vrh A . Nadalje, točka E je sjecište pravca CD i okomice iz vrha A na taj pravac. Dokažite: $|BD| + |DC| = 2|DE|$.

Zadatak 2.

Dokažite da u šiljastokutnom trokutu ABC s ortocentrom H vrijedi $\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCH$.

Zadatak 3.

Točke O i S su redom središta opisane i upisane kružnice trokuta. Izrazite $\sphericalangle OBS$ pomoću mjera kutova α , β i γ trokuta.

Zadatak 4.

Dokažite: ako je H ortocentar, a O centar opisane kružnice trokuta ABC , tada je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ ako i samo ako je $|AH| = |AO|$.

Zadatak 5.

Neka je CH visina šiljastokutnog trokuta ABC , a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO , dokažite da pravac TH prolazi polovištem dužine BC .

Zadatak 6.

Ako se središte opisane kružnice trokuta nalazi na jednoj od stranica trokuta, tada je taj trokut pravokutan. Dokažite.

Zadatak 7.

Promotrimo stranicu trokuta \overline{AB} i na njoj točku P koja je diralište upisane kružnice i \overline{AB} te točku Q koja je diralište pripisane kružnice i \overline{AB} . Dokažite da je tada $|AP| = |BQ|$.

Napomena: **pripisana kružnica trokuta** je kružnica koja dira jednu stranicu trokuta i produžetke preostalih dviju stranica. Dakle, središte pripisane kružnice trokuta jest sjecište simetrala jednog unutarnjeg kuta i dvaju vanjskih kutova trokuta i ona stranicu uz te vanjske kutove.

Zadatak 8.

Dokažite da ortocentar, težište i središte opisane kružnice trokuta leže na istom pravcu. Taj se pravac naziva **Eulerov pravac trokuta**. (Napomena: pretpostavite da trokut nije jednakostraničan.)

Zadatak 9.

Označimo nožišta visina trokuta ABC s N_A, N_B, N_C . Trokut $N_A N_B N_C$ je **nožišni trokut** trokuta ABC . Dokažite da je ortocentar trokuta ABC središte upisane kružnice njegovog nožišnog trokuta $N_A N_B N_C$.

Rješenja zadataka

Rješenje zadatka 1. Pogledajte ovdje [prvi dio](#), ovdje [drugi dio](#), a ovdje [treći dio](#) rješenja.

Rješenje zadatka 2. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 3. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 4. Pogledajte ovdje [dokaz prvog smjera](#), a ovdje [dokaz drugog smjera](#) tvrdnje zadatka.

Rješenje zadatka 5. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 6. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 7. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 8. Pogledajte ovdje [prvi dio](#), a ovdje [drugi dio](#) rješenja.

Rješenje zadatka 9. Pogledajte ga na [linku](#).