MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

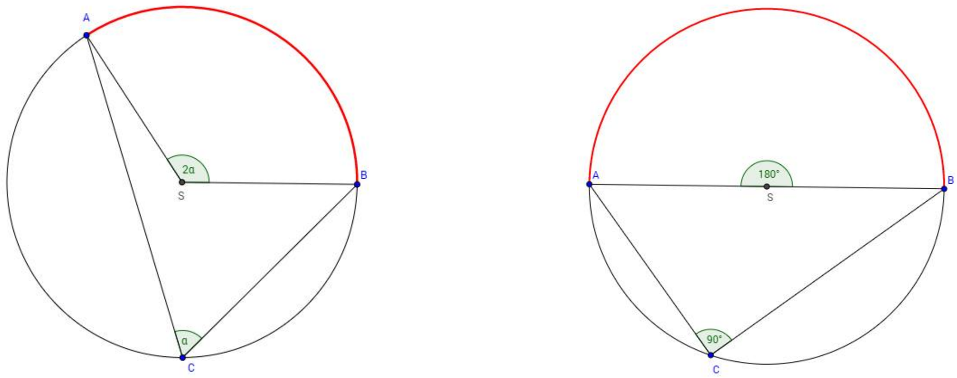
Tetivni četverokuti

21.2.2016.

Jedno od gradiva s kojim susrećemo u srednjoškolskoj nastavi u području geometrije, a zastupljeno je i u zadacima na matematičkim natjecanjima, su tetivni četverokuti. U ovom predavanju podrazumijevamo da ste već upoznati s karakterističnim točkama trokuta te teoremima o sličnosti i sukladnosti. Proći ćemo kroz osnovne primjere i svojstva tetivnih četverokuta te zadatke čija su rješenja dana u videima na koje su priloženi linkovi. Također, dio zadataka je ostavljeno bez rješenja za samostalni rad.

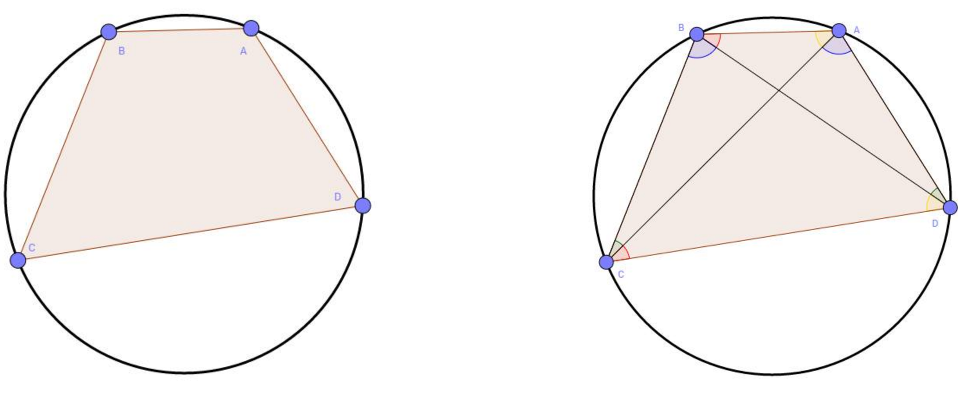
Svojstva tetivnog četverokuta

Podsjetimo se poučka o obodnom i središnjem kutu prema kojem je mjera središnjeg kuta (kuta između dva radijusa kružnice SA i SB) dvaput veća od mjere obodnog kuta nad istom lukom (to jest kuta $\sphericalangle ACB$ gdje je C proizvoljna točka na suprotnom luku $\widehat{AB}$). Na slici 1 vidi se kako ovaj poučak izgleda na primjeru kada je obodni kut šiljasti ili pravi.



Slika 1: Obodni i središnji kut.

Iz toga slijedi i poznati Talesov poučak, koji nalaže da je svaki trokut upisan nad promjerom pravokutan. Tetivni četverokuti su konveksni četverokuti čija četiri vrha leže na istoj kružnici. Drugim riječima, četverokut $ABCD$ je tetivan ukoliko povučemo kružnicu kroz tri njegova vrha A, B i C vrijedi da će i četvrti vrh D ležati na kružnici. Budući da mu se vrhovi nalaze na kružnici, stranice četverokuta su ujedno i tetive kružnice kao što se vidi na slici 2.



Slika 2: Tetivni četverokut.

Ukoliko u četverokutu povučemo dijagonale, moći ćemo primijeniti pravilo jednakosti obodnih kutova nad istom tetivom, kao što se vidi na slici 2. Iz toga slijedi da postoje četiri para jednakih kutova, određenih dijagonalama i stranicama četverokuta. Na primjer, kut $\sphericalangle ACB$ i kut $\sphericalangle ADB$ su oboje obodni kutovi nad lukom $\widehat{AB}$, te analogno vrijedi i za kutove $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BDC$ i $\sphericalangle BAC, \dots$ Iz toga slijedi

$$2 \cdot \sphericalangle ABD + 2 \cdot \sphericalangle DBC + 2 \cdot \sphericalangle ADB + 2 \cdot \sphericalangle BDC = 360^\circ \implies$$
$$2\left(\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC\right) + 2\left(\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC\right) = 360^\circ \implies$$
$$2\left(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC\right) = 360^\circ \implies \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ.$$

Analogno dobivamo $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$. Zato vrijedi

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ,$$

odnosno suma nasuprotnih kutova u tetivnom četverokutu iznosi 180°. Ta činjenica i jednaki kutovi između stranica i dijagonala označeni su na slici 2.

Zadatci

Zadatak 1.
Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su D i E nožišta okomica iz točke I na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tim redom. Dokažite da je četverokut $IECD$ tetivan.

Zadatak 2.
Neka su dane točke A, B, C i D u ravnini tako da nikoje 3 nisu na istom pravcu. Neka su E i F nožišta okomica iz točke D na pravce AB i AC, redom. Dokažite da je četverokut $AEDF$ tetivan i pokažite da je polovište dužine $\overline{AD}$ središte opisane kružnice tog četverokuta.

Zadatak 3.
Neka je dan trokut ABC u ravnini i tangenta na njegovu opisanu kružnicu u točki B. Dokažite da je kut između tangente i tetive $\overline{BC}$ jednak obodnom kutu $\sphericalangle BAC$.

Zadatak 4.
Dokažite da se simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ i simetrala stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC.

Zadatak 5.
Dokažite da polovišta stranica trokuta ABC i nožišta visina trokuta ABC leže na istoj kružnici.

Na kružnici iz Zadatka 5 još leže i polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$, gdje je H ortocentar trokuta ABC. Ta se kružnica zove **Feuerbachova kružnica** ili **kružnica 9 točaka**.

Zadatak 6.
Neka je H ortocentar trokuta ABC. Dokažite da osnosimetrične slike točke H s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

Zadatak 7.
Neka je H ortocentar trokuta ABC. Dokažite da centralnosimetrične slike točke H s obzirom na polovišta stranica trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

Zadatak 8.
Neka se simetrale kutova četverokuta $ABCD$ sijeku u točkama E, F, G i H. Dokažite da je četverokut $EFGH$ tetivan.

Zadatak 9.
Neka je k_1 kružnica koja prolazi vrhom A trokuta ABC te siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama D i E, redom. Neka je k_2 kružnica koja prolazi vrhom B i točkom D te siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki F, a kružnicu k_1 u T. Dokažite da je četverokut $CETF$ tetivan.

Zadatak 10.
Neka je D točka na opisanoj kružnici trokuta ABC tako da je na luku $\widehat{BC}$ koji ne sadrži točku A. Neka su X, Y i Z nožišta okomica iz točke D na pravce AB, BC i AC, redom. Dokažite da točke X, Y i Z leže na istom pravcu.

Pravac iz Zadatka 10 se zove **Simpsonov pravac**.

Zadatak 11.
Neka je D nožište visine iz vrha A trokuta ABC te neka su E i F nožišta iz D na stranice AB odnosno AC. Dokažita da je četverokut $BCFE$ tetivan.

Zadatak 12.
Dijagonale tetivnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki S. Kružnica k_1 opisana trokutu ABS siječe pravac BC u točki M, a kružnica k_2 opisana trokutu ADS siječe pravac CD u točki N. Dokažite da su točke S, M i N **kolinearne**, tj. da leže na istom pravcu.

Zadatak 13.
Upisana kružnica dodiruje stranice AB i AC trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Dokažite da je $BP \perp CP$.

Rješenja zadataka

Rješenje zadatka 1. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 2. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 3. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 4. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 5. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 6. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 7. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 8. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 9. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 10. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 11. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 12. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 13. Pogledajte ga na linku.