Relativno prosti brojevi

6.11.2016.

Uvod/teorijske osnove

Za ovo predavanje podrazumijevamo poznavanje svojstava djeljivosti prirodnih brojeva (i preporučamo da za ponavljanje pročitate predavanja *Djeljivost* i *Prosti brojevi*).

Definicija 1. *Za prirodne brojeve a i b kažemo da su* ***relativno prosti*** *ako ne postoji prost broj p takav da $p \mid a$ i $p \mid b$.*

Dakle, 5 i 7 su relativno prosti (jer nemaju niti jedan zajednički prosti faktor), a 6 i 10 nisu relativno prosti (jer su oba djeljiva s 2). U sljedećih nekoliko teorema izreći ćemo i dokazati neka osnovna svojstva relativno prostih brojeva.

Teorem 1. *Ako su a i b relativno prosti brojevi i vrijedi $a \mid b$, tada $a = 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, $a \neq 1$. To znači da postoji neki prost faktor p takav da $p \mid a$. Kako $a \mid b$, to slijedi da $p \mid b$. Međutim, sada $p \mid a$ i $p \mid b$, što nije moguće jer su a i b relativno prosti.

Teorem 2. *Ako su a i b relativno prosti brojevi i vrijedi $a \mid b \cdot n$, tada vrijedi $a \mid n$.*

Dokaz. Budući da a i b nemaju niti jedan zajednički prosti faktor, to niti jedan prost faktor od a neće dijeliti b, pa mora vrijediti i $a \mid n$.

Teorem 3. *Ako su a i b relativno prosti brojevi i vrijedi $a \mid n$ i $b \mid n$, tada vrijedi $ab \mid n$.*

Dokaz. Budući da vrijedi $a \mid n$, to postoji prirodan broj k takav da $n = k \cdot a$. Dakle, vrijedi $b \mid k \cdot a$. Međutim, budući da su a i b relativno prosti, to zbog teorema 2 vrijedi $b \mid k$. Opet, možemo pisati $k = b \cdot x$, iz čega slijedi $n = k \cdot a = bx \cdot a = ab \cdot x$, što znači $ab \mid n$.

Teorem 4. *Ako su a i b relativno prosti brojevi i vrijedi $ab = n^2$, tada su a i b potpuni kvadrati.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka a nije potpun kvadrat. To znači da je a djeljiv nekom neparnom potencijom nekog prostog broja p, tj. postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da $p^{2k+1} \mid a$ (i $p^{2k+2} \nmid a$). Odavde slijedi $p^{2k+1} \mid ab$, tj. $p^{2k+1} \nmid n^2$. Posebno, $p \mid n$, pa postoje $l, m_1 \in \mathbb{N}$ takvi da $n = p^l \cdot m$ (i $p \nmid m_1$). S druge strane, kvadrat broja n možemo zapisati kao $n^2 = p^{2k+1} \cdot m_2$ za neki $m_2 \in \mathbb{N}$ (i $p \nmid m_2$). Slijedi

$$p^{2k+1} \cdot m_2 = p^{2l} \cdot m_1^2.$$

Vidimo da je lijeva strana jednakosti djeljiva neparnom, a desna parnom potencijom broja p, što je kontradikcija. Analogno se pokazuje i da je b potpun kvadrat.

Teorem 5. *Ako su a i b relativno prosti brojevi, a x i y cijeli brojevi te vrijedi $ax = by$, tada vrijedi $a \mid y$ i $b \mid x$.*

Dokaz. Iz $ax = by$ slijedi da vrijedi $a \mid by$, a zbog teorema 2 vrijedi $a \mid y$, što je i trebalo dokazati. Analogno se dokazuje da vrijedi $b \mid x$.

Definicija 2. *Neka su $a, b \in \mathbb{N}$.* ***Najveći zajednički djelitelj*** *brojeva a i b, $\mathrm{NZD}(a, b)$, je najveći prirodan broj takav da $\mathrm{NZD}(a, b) \mid a$ i $\mathrm{NZD}(a, b) \mid b$.*

Najveći zajednički djelitelj brojeva a, b označavamo još i (a, b) ili $\gcd(a, b)$ (*greatest common divisor* u engleskom jeziku). Dakle, $\mathrm{NZD}(3,5) = 1$, ali $\mathrm{NZD}(3,6) = 3$ i $\mathrm{NZD}(15,18) = 3$. Obično zapisujemo $\mathrm{NZD}(a,b) = d$ i $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$. Primijetimo da vrijedi $\mathrm{NZD}(a_1, b_1) = 1$ (u suprotnom d ne bi bio najveći zajednički djelitelj brojeva a i b).

Teorem 6. *Prirodni brojevi a, b su relativno prosti ako i samo ako je* $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$.

Dokaz. Uočimo frazu *ako i samo ako* - to znači da trebamo dokazati dva smjera ove tvrdnje.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka su a i b relativno prosti. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\mathrm{NZD}(a,b) = d > 1$. Tada d ima prost djelitelj p. Budući da $d \mid a$ i $d \mid b$, vrijedi i $p \mid a$ i $p \mid b$. No, tada slijedi da a i b nisu relativno prosti. Kontradikcija.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka a i b nisu relativno prosti. Tada postoji prost broj p takav da $p \mid a$ i $p \mid b$. No prema definiciji najvećeg zajedničkog djelitelja slijedi $\mathrm{NZD}(a,b) \geqslant p > 1$. Kontradikcija.

Tvrdnju ekvivalentnu definiciji nekog pojma zovemo **karakterizacijom** tog pojma. Dakle, u teoremu 6 je izrečena jedna karakterizacija relativno prostih brojeva. Uočimo da karakterizaciju možemo koristiti i kao alternativnu definiciju pojma.

Napomena 1. $\mathrm{NZD}(a,b,c)$ *označava najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva a, b, c. Ako je* $\mathrm{NZD}(a,b,c) = 1$*, tada to ne mora nužno značiti da je* $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$*. Na primjer,* $\mathrm{NZD}(15,10,6) = 1$*, ali* $\mathrm{NZD}(15,6) = 3$.

Definicija 3. *Neka su $a, b \in \mathbb{N}$.* ***Najmanji zajednički višekratnik*** *brojeva a i b,* $\mathrm{NZV}(a,b)$*, je najmanji prirodan broj takav da vrijedi $a \mid \mathrm{NZV}(a,b)$ i $b \mid \mathrm{NZV}(a,b)$.*

Najmanji zajednički višekratnik brojeva a, b označavamo još i $[a, b]$ ili $\mathrm{lcm}(a, b)$ (*least common multiple* u engleskom jeziku). Dakle, $\mathrm{NZV}(3,6) = 6$ i $\mathrm{NZV}(15,10) = 30$.

Teorem 7. *Vrijedi*

$$\mathrm{NZV}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{NZD}(a,b)}.$$

Dokaz. Neka je $\mathrm{NZD}(a,b) = d$ i $a = a_1 d$, $b = b_1 d$. Vrijedi $a_1 d \mid \mathrm{NZV}(a_1 d, b_1 d)$ pa postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{NZV}(a_1 d, b_1 d) = a_1 d x$. Također vrijedi $b \mid \mathrm{NZV}(a,b)$, tj. $b_1 d \mid a_1 d x$, pa slijedi $b_1 \mid a_1 x$. Budući da je $\mathrm{NZD}(a_1, b_1) = 1$, prema teoremu 2 (i teoremu 6) vrijedi $b_1 \mid x$ pa $x = b_1 k$ (za neki $k \in \mathbb{N}$). Sada je

$$\mathrm{NZV}(a_1 d, b_1 d) = a_1 d x = a_1 b_1 d k = \frac{ab}{\mathrm{NZD}(a,b)} \cdot k.$$

Budući da tražimo najmanji broj takav da $a \mid \mathrm{NZV}(a,b)$ i $b \mid \mathrm{NZV}(a,b)$, to je $k = 1$ pa je $\mathrm{NZV}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{NZD}(a,b)}$.

Dakle, $\mathrm{NZV}(3,6) = \frac{3 \cdot 6}{\mathrm{NZD}(3,6)} = 6$ i $\mathrm{NZV}(15,10) = \frac{15 \cdot 10}{\mathrm{NZD}(15,10)} = 30$.

Primjer 1. *Dokažite da vrijedi*

(a) $\mathrm{NZD}(a, a+1) = 1$,

(b) $\mathrm{NZD}(ab+1, a) = 1$,

(c) $\mathrm{NZD}(a, a+2) \leqslant 2$,

(d) $\mathrm{NZD}(2k+1, 2k+3) = 1$,

(e) $\mathrm{NZD}(2k, 2k+6) = 2$ *ili* 6,

(f) $\mathrm{NZD}(2a+1, 6a+4) = 1$,

(g) $\mathrm{NZD}(3a+1, 4a+1) = 1$,

za sve $a, b, k \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

(a) Pretpostavimo suprotno, neka postoji prost broj p takav da vrijedi $p \mid a$ i $p \mid a+1$. Tada vrijedi $p \mid (a+1)-a=1$, što nije moguće. Kontradikcija.

(b) Pretpostavimo suprotno, neka postoji prost broj p takav da vrijedi $p \mid ab+1$ i $p \mid a$. Tada vrijedi $p \mid ab$, odakle $p \mid (ab+1)-ab=1$, što nije moguće. Kontradikcija.

(c) Neka je p prost broj takav da vrijedi $p \mid a$ i $p \mid a+2$. Tada vrijedi $p \mid (a+2)-a=2$, što znači $\mathrm{NZD}(a,a+2) \leqslant 2$.

(d) Pretpostavimo suprotno, neka postoji prost broj p takav da vrijedi $p \mid 2k+1$ i $p \mid 2k+3$. Tada vrijedi $p \mid (2k+3)-(2k+1)=2$, što znači $p \mid 2 \Rightarrow p=2$. Međutim, $p \mid 2k+1$. Kontradikcija.

(e) Neka je p prost broj takav da vrijedi $p \mid 2k$ i $p \mid 2k+6$. Tada vrijedi $p \mid (2k+6)-2k=6$, a budući da su $2k$ i $2k+6$ parni, to je $2 \mid \mathrm{NZD}(2k,2k+6)$. Ako $3 \mid k$, tada je $\mathrm{NZD}(2k,2k+6)=6$, a ako $3 \nmid k$ tada imamo $\mathrm{NZD}(2k,2k+6)=2$.

(f) Pretpostavimo suprotno, neka postoji prost broj p takav da vrijedi $p \mid 2a+1$ i $p \mid 6a+4$. Tada vrijedi $p \mid 3(2a+1)=6a+3$, odakle $p \mid (6a+4)-(6a+3)=1$, što nije moguće. Kontradikcija.

(g) Pretpostavimo suprotno, neka postoji prost broj p takav da vrijedi $p \mid 3a+1$ i $p \mid 4a+1$. Tada vrijedi $p \mid 4(3a+1)=12a+4$ i $p \mid 3(4a+1)=12a+3$, odakle $p \mid (12a+4)-(12a+3)=1$, što nije moguće. Kontradikcija.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Neka su x i z relativno prosti prirodni brojevi. Ako vrijedi $(y^2-x^2)-(z^2-y^2)=((y-x)-(z-y))^2$, dokažite da su x i z potpuni kvadrati.

Rješenje.
Iz zadane jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+xz-2yz-2xy&=0\\ \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xz-2yz-2xy&=xz\\ \Rightarrow (x-y+z)^2&=xz. \end{aligned}$$

Budući da su x i z relativno prosti i njihov umnožak je potpun kvadrat, to iz teorema 4 dobivamo da su x i z također potpuni kvadrati.

Zadatak 2.
Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $ab \mid a^2+b^2$. Dokažite da je $a=b$.

Rješenje.
Neka je $\mathrm{NZD}(a,b)=d$. Tada je $a=a_1\cdot d$ i $b=b_1\cdot d$, gdje su brojevi a_1 i b_1 relativno prosti. Uvrštavajući to u uvjet zadatka dobivamo:

$$a_1\cdot b_1\cdot d^2 \mid a_1^2\cdot d^2+b_1^2\cdot d^2=d^2(a_1^2+b_1^2) \Rightarrow a_1\cdot b_1 \mid a_1^2+b_1^2 \Rightarrow a_1 \mid b_1^2.$$

Budući da su a_1 i b_1 relativno prosti, teorem 1 povlači $a_1=1$. Slično dobivamo i $b_1=1$. Sada je $a=b=d$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3.
Neka su a i b prirodni brojevi. Dokažite da je $\dfrac{a^2+2ab+1}{ab+1}$ prirodan broj ako i samo ako je $\dfrac{b^2+2ab+1}{ab+1}$ prirodan broj.

Rješenje.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ako je $\dfrac{a^2+2ab+1}{ab+1}$ prirodan broj, tada vrijedi $ab+1 \mid a^2+2ab+1$ odakle slijedi $ab+1 \mid a^2+ab = a(a+b)$. Primijetimo da je $\mathrm{NZD}(ab+1, a) = 1$ (primjer 1.(b)), pa zbog teorema 2 vrijedi $ab+1 \mid a+b$. Odavde slijedi $ab+1 \mid b(a+b) = ab+b^2$, tj. $ab+1 \mid b^2+2ab+1$ pa je $\dfrac{b^2+2ab+1}{ab+1}$ prirodan broj.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ako je $\dfrac{b^2+2ab+1}{ab+1}$ prirodan broj, tada vrijedi $ab+1 \mid b^2+2ab+1$ odakle slijedi $ab+1 \mid b^2+ab = b(a+b)$. Sada zbog $\mathrm{NZD}(ab+1, b) = 1$ i teorema 2 slijedi $ab+1 \mid a+b$ te analogno kao u obratu ovog smjera dobivamo da je $\dfrac{a^2+2ab+1}{ab+1}$ prirodan broj.

Zadatak 4.
Nađite sve prirodne brojeve n takve da $n+2016 \mid n^2+2016$ i $n+2017 \mid n^2+2017$.

Rješenje.
Iz $n+2016 \mid n^2+2016$ dobivamo $n+2016 \mid n^2+2016-(n+2016) = n(n-1)$. Slično, iz $n+2017 \mid n^2+2017$ dobivamo $n+2017 \mid n^2+2017-(n+2017) = n(n-1)$. Budući da su svaka dva uzastopna broja relativno prosta (primjer 1.(a), teorem 6), vrijedi $\mathrm{NZD}(n+2016, n+2017) = 1$, a budući da vrijedi $n+2016 \mid n(n-1)$ i $n+2017 \mid n(n-1)$, to zbog teorema 4 slijedi $(n+2016)(n+2017) \mid n(n-1)$, što je očito moguće samo za $n=1$. (U suprotnom, budući da vrijedi $n(n-1) < (n+2016)(n+2017)$, to ne bi moglo vrijediti $(n+2016)(n+2017) \mid n(n-1)$.) Uvrštavanjem $n=1$ u početne uvjete dobivamo da je to zaista rješenje.

Zadatak 5.
Ako za prirodne brojeve a, b, c vrijedi $c(b^2+1) = b(a-2c)$ i $\mathrm{NZD}(a, c) = 1$, dokažite da je a potpun kvadrat.

Rješenje.
Iz uvjeta zadatka slijedi $c \mid b(a-2c)$. Kad bi postojao neki prost broj p takav da vrijedi $p \mid c$ i $p \mid a-2c$, tada bi $p \mid a$, što je kontradikcija jer su brojevi a i c relativno prosti. Dakle, brojevi c i $a-2c$ su relativno prosti. Budući da vrijedi $c \mid b(a-2c)$, to prema teoremu 2 vrijedi $c \mid b \Rightarrow b = c \cdot k$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo

$$c((c\cdot k)^2+1) = c\cdot k(a-2c) \Rightarrow (c\cdot k)^2+1 = k(a-2c) \Rightarrow k \mid c\cdot k^2+1.$$

Budući da vrijedi $k \mid c\cdot k^2$, to $k \mid 1$ odakle slijedi $k=1$. Sada imamo $c^2+1 = a-2c$, tj. $a = (c+1)^2$.

Zadatak 6.
Dokažite da je $\mathrm{NZD}(5a+3b, 13a+8b) = \mathrm{NZD}(a, b)$.

Rješenje.
Neka je $\mathrm{NZD}(a, b) = d$. Tada je $a = a_1 \cdot d$ i $b = b_1 \cdot d$, gdje su brojevi a_1 i b_1 relativno prosti. Uvrštavanjem u tvrdnju zadatka dobivamo:

$$\mathrm{NZD}(5a_1\cdot d + 3b_1\cdot d, 13a_1\cdot d + 8b_1\cdot d) = \mathrm{NZD}(a_1\cdot d, b_1\cdot d).$$

Primijetimo da (prema definiciji najvećeg djelitelja) vrijedi $\mathrm{NZD}(x\cdot z, y\cdot z) = z\cdot \mathrm{NZD}(x, y)$ pa imamo

$$d\cdot \mathrm{NZD}(5a_1+3b_1, 13a_1+8b_1) = d\cdot \mathrm{NZD}(a_1, b_1),$$

tj.

$$\mathrm{NZD}(5a_1+3b_1, 13a_1+8b_1) = \mathrm{NZD}(a_1, b_1) = 1,$$

pa treba dokazati da vrijedi $\mathrm{NZD}(5a_1+3b_1, 13a_1+8b_1) = 1$.
Pretpostavimo suprotno, neka postoji neki prost broj p takav da vrijedi $p \mid 5a_1+3b_1$ i $p \mid 13a_1+8b_1$. Iz $p \mid 5a_1+3b_1$ slijedi

$$p \mid 8(5a_1+3b_1) = 40a_1+24b_1. \tag{1}$$

Iz $p \mid 13a_1+8b_1$ slijedi

$$p \mid 3(13a_1+8b_1) = 39a_1+24b_1. \tag{2}$$

Sada iz 1 i 2 dobivamo $p \mid (40a_1+24b_1)-(39a_1+24b_1) = a_1$. Budući da vrijedi $p \mid 5a_1+3b_1$ i $p \mid a_1$, to slijedi $p \mid 3b_1$. Budući da su a_1 i b_1 relativno prosti, to prema teoremu 2 vrijedi $p \mid 3$. Slično, budući da vrijedi $p \mid 13a_1+8b_1$ i $p \mid a_1$, to slijedi $p \mid 8b_1$, a budući da su a_1 i b_1 relativno prosti, to prema teoremu 2 vrijedi $p \mid 8$. Imamo $p \mid 3$ i $p \mid 8$ pa $p=1$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je p zajednički prost faktor brojeva a i b. Dakle, $5a_1+3b_1$ i $13a_1+8b_1$ nemaju zajednički prosti faktor, pa su relativno prosti, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 7.
Nađite sve parove (a,b) prirodnih brojeva takve da je $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ kvadrat prostog broja.

Rješenje.
Zbog uvjeta zadatka je $\frac{a^2(b-a)}{b+a} = p^2$, gdje je p neki prost broj. Sada je:

$$a^2 \cdot b - a^3 = b \cdot p^2 + a \cdot p^2$$
$$\Rightarrow b(a^2 - p^2) = a^3 + a \cdot p^2$$
$$\Rightarrow b = \frac{a^3 + a \cdot p^2}{a^2 - p^2}.$$

Budući da je b prirodan broj, to mora vrijediti $a^2 - p^2 \mid a^3 + a \cdot p^2 = a(a^2 + p^2)$.
Razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: $p \mid a$.
   Tada uvrštavanjem $a = p \cdot k$ dobivamo: $p^2 \cdot k^2 - p^2 \mid pk(p^2 \cdot k^2 + p^2) \Rightarrow k^2 - 1 \mid pk(k^2+1)$. Vrijedi $\mathrm{NZD}(k^2-1, k) = 1$ i $\mathrm{NZD}(k^2-1, k^2+1) = 2$ (pokažite ovo za vježbu) pa iz svega navedenog zaključujemo $k^2 - 1 \mid 2p$. Mogući su sljedeći slučajevi:
   a) $k^2 - 1 = 1$, što nema prirodnih rješenja.
   b) $k^2 - 1 = 2$, što nema prirodnih rješenja.
   c) $k^2 - 1 = 2p$, odakle (promatranjem ostataka pri dijeljenju s 4) slijedi da je p paran broj, a budući da je prost, to slijedi $p = 2$. Međutim jednadžba $k^2 - 1 = 4$ nema rješenja.
   d) $k^2 - 1 = p \Rightarrow (k-1)(k+1) = p$, što je jedino moguće ako je $k - 1 = 1$, tj $k = 2 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 10$.
2. slučaj. $p \nmid a$.
   Sada vrijedi $\mathrm{NZD}(a,p) = 1 \Rightarrow \mathrm{NZD}(a^2 - p^2, a) = 1$. Sada iz $a^2 - p^2 \mid a(a^2 + p^2)$ slijedi da $a^2 - p^2 \mid a^2 + p^2$ pa $a^2 - p^2 \mid (a^2 + p^2) - (a^2 - p^2) = 2p^2$. Budući da vrijedi $\mathrm{NZD}(a,p) = 1$, imamo $\mathrm{NZD}(a^2 - p^2, p^2) = 1 \Rightarrow a^2 - p^2 \mid 2$. Mogući su sljedeći slučajevi:
   a) $a^2 - p^2 = 1 \Rightarrow (a-p)(a+p) = 1$, što nema prirodnih rješenja.
   b) $a^2 - p^2 = -1$, kao i prethodni slučaj, nema prirodnih rješenja.
   c) $a^2 - p^2 = 2 \Rightarrow (a-p)(a+p) = 2 \Rightarrow a - p = 1$ i $a + p = 2$, što nema prirodnih rješenja.
   d) $a^2 - p^2 = -2$, kao i prethodni slučaj, nema rješenja.

Dakle, jedino rješenje je $a = 6$, $b = 10$, a provjerom dobivamo da zadovoljava uvjet zadatka.

Zadatak 8.
Ako su a i b prirodni brojevi takvi da je $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b+1}{a}$ prirodan broj, dokažite da je b potpun kvadrat.

Rješenje.
Imamo $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b+1}{a} = \dfrac{a^2 + b^2 + b}{ab}$. To znači da mora vrijediti $ab \mid a^2 + b^2 + b$. Neka je $\mathrm{NZD}(a,b) = d$. Tada je $a = a_1 \cdot d$ i $b = b_1 \cdot d$, gdje su brojevi a_1 i b_1 relativno prosti. Uvrštavajući ovo u $ab \mid a^2 + b^2 + b$ dobivamo

$$a_1 \cdot b_1 \cdot d^2 \mid d(a_1^2 \cdot d + b_1^2 \cdot d + b_1),$$

odakle slijedi

$$a_1 \cdot b_1 \cdot d \mid a_1^2 \cdot d + b_1^2 \cdot d + b_1 \Rightarrow b_1 \mid a_1^2 \cdot d.$$

Međutim, budući da je $\mathrm{NZD}(a_1, b_1) = 1$, to imamo $b_1 \mid d$. Uvrstimo $d = b_1 \cdot k$:

$$a_1 \cdot b_1^2 \cdot k \mid a_1^2 \cdot b_1 \cdot k + b_1^3 \cdot k + b_1 = b_1(a_1^2 \cdot k + b_1^2 \cdot k + 1)$$
$$\Rightarrow a_1 \cdot b_1 \cdot k \mid a_1^2 \cdot k + b_1^2 \cdot k + 1$$

odakle slijedi $k \mid 1$, tj. $k = 1$, što znači $b = b_1 \cdot d = b_1 \cdot b_1 \cdot k = b_1^2$, što je potpun kvadrat.

Zadatak 9.
Ako je $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$, gdje su a, b, c pozitivni cijeli brojevi bez zajedničkog prostog faktora (tj. $\mathrm{NZD}(a,b,c) = 1$), pokažite da je $a + b$ kvadrat cijelog broja.

Rješenje.
Iz početne jednakosti dobivamo $c(a+b)=ab$. Neka je $\mathrm{NZD}(a,b)=d$. Tada je $a=a_1\cdot d$ i $b=b_1\cdot d$, gdje su brojevi a_1 i b_1 relativno prosti. Uvrštavanjem u tvrdnju zadatka dobivamo

$$c\cdot d(a_1+b_1)=d^2\cdot a_1\cdot b_1\Rightarrow c(a_1+b_1)=d\cdot a_1\cdot b_1,$$

odakle slijedi $a_1\mid c(a_1+b_1)$. Budući da je $\mathrm{NZD}(a_1,a_1+b_1)=1$, to prema teoremu 2 vrijedi $a_1\mid c$. Slično dobivamo i $b_1\mid c$. Sada iz $a_1\mid c$ i $b_1\mid c$ te teorema 3 imamo $a_1\cdot b_1\mid c$. Uvrštavanjem $c=a_1\cdot b_1\cdot x$ u prethodno dobivenu jednakost imamo

$$a_1\cdot b_1\cdot x(a_1+b_1)=d\cdot a_1\cdot b_1$$
$$x\cdot(a_1+b_1)=d\Rightarrow x\mid d. \tag{3}$$

Međutim, iz uvjeta je $1=\mathrm{NZD}(a,b,c)=\mathrm{NZD}(a_1\cdot d,b_1\cdot d,a_1\cdot b_1\cdot x)$, što znači

$$\mathrm{NZD}(x,d)=1 \tag{4}$$

(U suprotnom bi brojevi a,b i c imali neki zajednički prost faktor.) Iz 3, 4 i teorema 1 slijedi da je $x=1$ pa je $a_1+b_1=d$, tj. $d\cdot(a_1+b_1)=d^2$, odakle imamo $a+b=d^2$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 10.

Nađite sve prirodne brojeve x,y tako da $x+y+1\mid 2xy$ i $x+y-1\mid x^2+y^2-1$.

Rješenje.
Primjenom formule za razliku kvadrata imamo $x+y-1\mid(x+y)^2-1$. Sada iz uvjeta zadatka slijedi $x+y-1\mid x^2+y^2-1-(x+y)^2+1=-2xy$ pa imamo $x+y+1\mid 2xy$ i $x+y-1\mid 2xy$. Lako se dobiva da vrijedi $\mathrm{NZD}(x+y+1,x+y-1)\leqslant 2$. To znači da mora vrijediti $(x+y-1)(x+y+1)\mid 4xy$, tj. $(x+y-1)(x+y+1)\leqslant 4xy$. Nadalje,

$$(x+y)^2-1\leqslant 4xy\Rightarrow(x-y)^2\leqslant 1.$$

Dakle, ili je $x=y$, ili je $x-y=\pm1$. Ako je $x=y$ imamo $2x+1\mid 2x^2$, što ne može vrijediti jer je $\mathrm{NZD}(2x+1,x^2)=1$, pa bi moralo biti $2x+1\mid 2$. Ako je $x-y=\pm1$, neka je bez smanjenja općenitosti $x-y=1$. Tada provjerom dobivamo da su uvjeti zadatka zadovoljeni. Dakle, rješenja su svi prirodni brojevi x,y koji zadovoljavaju jednadžbu $x-y=\pm1$.

Zadatak 11.

Nađite sve parove prirodnih brojeva (a,b) takvih da su $2a+1$ i $2b-1$ relativno prosti i da $a+b\mid 4ab+1$.

Rješenje.
Budući da vrijedi $a+b\mid 4ab+1$, to vrijedi i

$$a+b\mid 4ab+1+2(a+b)=(2a+1)(2b+1). \tag{5}$$

Slično, zbog $a+b\mid 4ab+1$ vrijedi i

$$a+b\mid 4ab+1-2(a+b)=(2a-1)(2b-1). \tag{6}$$

Dokažimo da su brojevi $2b+1$ i $2b-1$ relativno prosti. Pretpostavimo suprotno, neka postoji neki prost broj p takav da vrijedi $p\mid 2b+1$ i $p\mid 2b-1$. Tada bi vrijedilo $p\mid(2b+1)-(2b-1)=2$. Sada $p\mid 2$ i $p\mid 2b+1$, što je očigledno kontradikcija. Dakle, vrijedi $\mathrm{NZD}(2b+1,2b-1)=1$. Zbog uvjeta zadatka je i $\mathrm{NZD}(2a+1,2b-1)=1$. To znači da je

$$\mathrm{NZD}((2b+1)(2a+1),2b-1)=1. \tag{7}$$

Sada, iz 5, 6 i 7 imamo $\mathrm{NZD}(a+b,2b-1)=1$. Zbog teorema 2 imamo:

$$a+b\mid 2a-1\Rightarrow a+b\mid 2a-1-2(a+b)=-1-2b\Rightarrow a+b\mid 2b+1.$$

Dakle, vrijedi $a+b\mid 2a-1$ i $a+b\mid 2b+1$. To znači da vrijedi $a+b\leqslant 2a-1\Rightarrow b\leqslant a-1$ i $a+b\leqslant 2b+1\Rightarrow a-1\leqslant b$. Dakle, mora vrijediti $b=a-1$. Iz uvjeta zadatka su $2a+1$ i $2b-1$ relativno prosti, pa moraju i $2a+1$ i $2(a-1)-1=2a-3$ biti relativno prosti (lakom provjerom dobivamo da jesu). Dalje, mora vrijediti $a+b\mid 4ab+1$, tj. $2a-1\mid 4a(a-1)+1=4a^2-4a+1=(2a-1)^2$, što je točno. Dakle, rješenja su svi parovi prirodnih brojeva (a,b) za koje vrijedi $b=a-1$.

Zadatak 12.

Nađite sve parove (a,b) prirodnih brojeva takvih da je $\mathrm{NZD}(a,b)+\mathrm{NZV}(a,b)+a+2b=ab$.

Zadatak 13.
Odredite sve parove (a, b) cijelih brojeva tako da su $\dfrac{2a+3}{b} + \dfrac{2b+3}{a}$ i $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$ također cijeli brojevi.

Zadatak 14.
Odredite sve uređene trojke (m, n, p) prirodnih brojeva takvih da je $n^2 - 5p^m = 1$ i p je prost broj.

Zadatak 15.
Nađite sve prirodne brojeve x i y takve da su $3x^2 + 4y^2$ i $3y^2 + 4x^2$ potpuni kvadrati.

Zadatak 16.
Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $\mathrm{NZD}(a, b, c) = d$ i neka je $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$. Dokažite da su $abcd$ i $d(b-a)$ potpuni kvadrati.

Zadatak 17.
Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $a > b$. Ako znamo da je $\mathrm{NZD}(ab+1, a-b) = 1$, dokažite da $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ nije potpun kvadrat.

Rješenja ostalih zadataka

Rješenje zadatka 12. Neka je $\mathrm{NZD}(a,b) = d$. Tada je $a = a_1 \cdot d$ i $b = b_1 \cdot d$, gdje su brojevi a_1 i b_1 relativno prosti. Sada je $\mathrm{NZV}(a,b) = a_1 \cdot b_1 \cdot d$. Uvrštavajući ovo u početnu jednadžbu dobivamo:

$$d + a_1 \cdot b_1 \cdot d + a_1 \cdot d + 2b_1 \cdot d = a_1 \cdot b_1 \cdot d^2,$$

tj.

$$1 + a_1 \cdot b_1 + a_1 + 2b_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot d.$$

Sada imamo $a_1 \mid 1 + 2b_1$ i $b_1 \mid 1 + a_1$. Razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: $a_1 = 1 + 2b_1$.
   Imamo $b_1 \mid 1 + 1 + 2b_1 = 2 + 2b_1 \Rightarrow b_1 \mid 2$. Za $b_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 3 + 2 = 3 \cdot d \Rightarrow d = 3$ $(a = 9, b = 3)$. Za $b_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow 1 + 10 + 5 + 4 = 10 \cdot d \Rightarrow d = 2$ $(a = 10, b = 4)$.

2. slučaj: $2a_1 \leqslant 1 + 2b_1$.
   Sada je $2(a_1 - b_1) \leqslant 1$. Iz $b_1 \mid 1 + a_1$ je

   $$b_1 \leqslant 1 + a_1 \Rightarrow -1 \leqslant a_1 - b_1 \Rightarrow -2 \leqslant 2(a_1 - b_1).$$

   Slijedi $-2 \leqslant 2(a_1 - b_1) \leqslant 1$. Budući da je $2(a_1 - b_1)$ paran broj, to je ili $2(a_1 - b_1) = 0$, ili $2(a_1 - b_1) = -2$. Za $2(a_1 - b_1) = 0$, zbog $a_1 \mid 1 + 2b_1$ imamo $a_1 = b_1 = 1 \Rightarrow d = 5$ $(a = 5, b = 5)$. Za $2(a_1 - b_1) = -2$ imamo $a_1 = b_1 - 1$. Zbog $a_1 \mid 1 + 2a_1 + 2 = 2a_1 + 3$ slijedi $a_1 \mid 3$:

   a) ako je $a_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 2 \Rightarrow d = 4$ $(a = 4, b = 8)$,
   b) ako je $a_1 = 3 \Rightarrow b_1 = 4 \Rightarrow d = 2$ $(a = 6, b = 8)$.

Dakle rješenja su: $(a,b) \in \{(9,3), (10,4), (5,5), (4,8), (6,8)\}$.

Rješenje zadatka 13. Imamo

$$\frac{2a+3}{b} + \frac{2b+3}{a} = \frac{2a^2 + 3a + 2b^2 + 3b}{ab} \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab \mid 2a^2 + 3a + 2b^2 + 3b,$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab} \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab \mid a^3 + b^3.$$

Neka je $\mathrm{NZD}(a,b) = d$. Tada je $a = a_1 \cdot d$ i $b = b_1 \cdot d$, gdje su brojevi a_1 i b_1 relativno prosti. Uvrštavanjem dobivamo:

$$a_1 \cdot b_1 \cdot d^2 \mid d^3(a_1^3 + b_1^3), \quad a_1 \cdot b_1 \mid d(a_1^3 + b_1^3).$$

Lako se dobiva $\mathrm{NZD}(a_1^3 + b_1^3, a_1 \cdot b_1) = 1$ pa zbog teorema 2 vrijedi $a_1 \cdot b_1 \mid d \Rightarrow d = a_1 \cdot b_1 \cdot x$

$$\Rightarrow a_1 \cdot b_1 \cdot d^2 \mid d(2a_1^2 \cdot d + 3a_1 + 2b_1^2 \cdot d + 3b_1)$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot b_1 \cdot d \mid 2a_1^2 \cdot d + 3a_1 + 2b_1^2 \cdot d + 3b_1$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot b_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot x \mid 2a_1^2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot x + 3a_1 + 2b_1^2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot x + 3b_1$$

$$\Rightarrow a_1^2 \cdot b_1^2 \cdot x \mid 2a_1^3 \cdot b_1 \cdot x + 3a_1 + 2b_1^3 \cdot a_1 \cdot x + 3b_1$$

$$\Rightarrow a_1 \mid 3b_1 \text{ i } b_1 \mid 3a_1.$$

Budući da su a_1 i b_1 relativno prosti, to vrijedi $a_1 \mid 3$ i $b_1 \mid 3$. Sada razlikujemo slučajeve:

1. slučaj: ako je $a_1 = 3$, tada je $b_1 = 1$ (jer je $\mathrm{NZD}(a_1, b_1) = 1$).
   Imamo

   $$9x \mid 54x + 9 + 6x + 3 = 12 + 60x \Rightarrow 3x \mid 4 + 20x \Rightarrow 3x \mid 4 - x.$$

   $x = 1, 4$ su rješenja, $x = 2, 3$ nisu, a za $x > 4$ vrijedi $x - 4 < 3x$, što ne može vrijediti jer $3x \mid x - 4$. Za $x = 1$ je $d = a_1 \cdot b_1 \cdot x = 3$, tj. $a = 9$ i $b = 3$. Za $x = 4$ je $d = a_1 \cdot b_1 \cdot x = 12$, tj. $a = 36$ i $b = 12$.

2. slučaj: $a_1 = 1$ i $b_1 = 1$.
   Imamo

   $$x \mid 2x + 3 + 2x + 3 = 4x + 6 \Rightarrow x \mid 6.$$

   Za $x = 1$ je $d = 1 \Rightarrow a = b = 1$. Za $x = 2$ je $d = 2 \Rightarrow a = b = 2$. Za $x = 3$ je $d = 3 \Rightarrow a = b = 3$. Za $x = 6$ je $d = 6 \Rightarrow a = b = 6$.

3. slučaj: $a_1 = 1$ i $b_1 = 3$.
   Zamjenom uloga a_1 i b_1 vidimo da se ovaj slučaj svodi na prvi (dobivamo ista rješenja samo sa zamijenjenim a i b).

Dakle, provjerom vidimo da su rješenja

$$(a, b) \in \{(9, 3), (3, 9), (36, 12), (12, 36), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (6, 6)\}.$$

Rješenje zadatka 14. Iz $n^2 - 5p^m = 1$ slijedi $(n-1)(n+1) = 5p^m$. Lako se dobiva da je $\mathrm{NZD}(n-1, n+1) \leqslant 2$. Razlikujemo sljedeće slučajeve:

1. slučaj: $p = 2$.
   Sada vrijedi $\mathrm{NZD}(n-1, n+1) = 2$. Vrijedi ili $2 \mid n-1$ i $2^{m-1} \mid n+1$, ili $2 \mid n+1$ i $2^{m-1} \mid n-1$.
   a) Ako vrijedi $2 \mid n-1$ i $2^{m-1} \mid n+1$, primijetimo da $n = 3$ nije rješenje, pa vrijedi $n - 1 = 10$, za što provjerom dobivamo da nije rješenje.
   b) Ako vrijedi $2 \mid n+1$ i $2^{m-1} \mid n-1$, budući da $n = 1$ nije rješenje, to je $n + 1 = 10$, odakle dobivamo rješenje $n = 9$ i $m = 4$.
2. slučaj: $p > 2$.
   Sada vrijedi $\mathrm{NZD}(n-1, n+1) = 1$. Dakle, ili je $p^m \mid n-1$, ili $p^m \mid n+1$.
   a) Ako $p^m \mid n-1$, tada, budući da je $n+1 > 1$, mora vrijediti $n - 1 = p^m$ i $n + 1 = 5$, odakle dobivamo rješenje $n = 4, p = 3, m = 1$.
   b) Ako $p^m \mid n+1$, tada (budući da $n = 2$ nije rješenje) vrijedi $n - 1 = 5, n + 1 = p^m$, odakle dobivamo rješenje $n = 6, p = 7, m = 1$.

Dakle, rješenja su: $(m, n, p) \in \{(4, 9, 2), (1, 4, 3), (1, 6, 7)\}$.

Rješenje zadatka 15. Neka je $\mathrm{NZD}(x, y) = d$, i neka je $x = x_1 \cdot d$ i $y = y_1 \cdot d$. Dakle, trebamo pokazati da su $d^2(3x_1^2 + 4y_1^2)$ i $d^2(3y_1^2 + 4x_1^2)$ potpuni kvadrati, tj. da su $3x_1^2 + 4y_1^2$ i $3y_1^2 + 4x_1^2$ potpuni kvadrati. Promotrimo ostatke koje kvadrat može davati pri dijeljenju sa 7 (kvadratne ostatke modulo 7):

$$\begin{aligned}
0^2 &\equiv 0 \pmod 7, & 4^2 &\equiv (-3)^2 \equiv 2 \pmod 7,\\
1^2 &\equiv 1 \pmod 7, & 5^2 &\equiv (-2)^2 \equiv 4 \pmod 7,\\
2^2 &\equiv 4 \pmod 7, & 6^2 &\equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 7.\\
3^2 &\equiv 2 \pmod 7, & &
\end{aligned}$$

Dakle, kvadratni ostaci modulo 7 su $0, 1, 2, 4$.
Neka je $3x_1^2 + 4y_1^2 = a^2$ i $3y_1^2 + 4x_1^2 = b^2$. Sada je $7(x_1^2 + y_1^2) = a^2 + b^2 \Rightarrow 7 \mid a^2 + b^2$. Zbog prethodnih razmatranja mora vrijediti $7 \mid a$ i $7 \mid b$. Sada vrijedi $49 \mid a^2$ i $49 \mid b^2 \Rightarrow 49 \mid a^2 + b^2$. Iz $7(x_1^2 + y_1^2) = a^2 + b^2$ dobivamo $7 \mid x_1^2 + y_1^2$. Iz sličnih razloga imamo $7 \mid x_1$ i $7 \mid y_1$. Međutim, ovo nije moguće jer su x_1 i y_1 relativno prosti. Dakle, ne postoje traženi prirodni brojevi.

Rješenje zadatka 16. Neka je $\mathrm{NZD}(a, b) = x$, te neka je $a = a_1 \cdot x$ i $b = b_1 \cdot x$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$c(b - a) = ab \Rightarrow c \cdot x(b_1 - a_1) = x^2 \cdot a_1 \cdot b_1 \Rightarrow c(b_1 - a_1) = x \cdot a_1 \cdot b_1.$$

Budući da je $\mathrm{NZD}(a, b, c) = d$, to je $\mathrm{NZD}(x, c) = d$. Neka je $x = d \cdot x_1$ i $c = d \cdot c_1$. Vrijedi $\mathrm{NZD}(x_1, c_1) = 1$. Imamo

$$c(b_1 - a_1) = x \cdot a_1 \cdot b_1 \Rightarrow c_1(b_1 - a_1) = x_1 \cdot a_1 \cdot b_1.$$

Budući da je $\mathrm{NZD}(a_1 \cdot b_1, b_1 - a_1) = 1$, to vrijedi $a_1 \cdot b_1 \mid c_1 \Rightarrow c_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot s$. Dakle, $s(b_1 - a_1) = x_1$, odakle slijedi $s \mid x_1$. Međutim, budući da vrijedi $\mathrm{NZD}(x_1, c_1) = 1$, to je i $\mathrm{NZD}(x_1, s) = 1$, pa je $s = 1$, tj. $b_1 - a_1 = x_1$. Sada je

$$abcd = a_1 \cdot x \cdot b_1 \cdot x \cdot d \cdot c_1 \cdot d = a_1 \cdot b_1 \cdot d^2 \cdot x_1^2 \cdot d \cdot c_1 \cdot d = a_1^2 \cdot b_1^2 \cdot d^4 \cdot x_1^2 = (a_1 \cdot b_1 \cdot d^2 \cdot x_1)^2,$$
$$d(b - a) = d \cdot x(b_1 - a_1) = d^2 \cdot x_1(b_1 - a_1) = d^2 \cdot x_1^2 = (d \cdot x_1)^2.$$

Rješenje zadatka 17. Pretpostavimo suprotno. Primijetimo da vrijedi $(a-b)^2+(ab+1)^2=(a^2+1)(b^2+1)$. Očigledno je da a^2+1 i b^2+1 ne mogu biti kvadrati. Budući da je $(a^2+1)(b^2+1)$ potpun kvadrat i niti jedan od faktora nije potpun kvadrat, to postoji prost broj p takav da vrijedi $p^x \mid a^2+1$ i $p^y \mid b^2+1$. Odavde slijedi $p^{min(x,y)} \mid a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: postoji p takav da $p \neq 2$.
   Dokažimo da ne može vrijediti i $p \mid a-b$ i $p \mid a+b$. Kada bi to vrijedilo, imali bi-smo $p \mid 2a$. Budući da $p \mid a^2+1$, to $p \not| a$. Budući da $p \neq 2$ i $p \nmid a$, to iz $p \mid 2a$ slijedi $p=1$, što nije moguće. Dakle, ili $p^{min(x,y)} \mid a-b$, ili $p^{min(x,y)} \mid a+b$. Ako $p^{min(x,y)} \mid a-b$, tada $p^{2min(x,y)} \mid (a-b)^2$. Budući da je zadano $\mathrm{NZD}(a-b,ab+1)=1$ i $p^{2min(x,y)} \mid (a-b)^2$, to $p \not|(a-b)^2+(ab+1)^2$. Ovo je kontradikcija, budući da je $(a-b)^2+(ab+1)^2=(a^2+1)(b^2+1)$. Slično se pokazuje i u slučaju $p^{min(x,y)} \mid a+b$.

2. slučaj: ne postoji nijedan drugi p (osim $p=2$).
   Zbog $p^x \mid a^2+1$ moraju i a i b biti neparni. Međutim, sada ne vrijedi $\mathrm{NZD}(a-b,ab+1)=1$, pa ovaj slučaj nije moguć.