O6	Olimpijska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Projektivna geometrija

Nikola Šalgaj

9. studenoga 2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr | Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" | matematicari.mnm

Praktična teorija

Neka su A, B, C, D četiri kolinearne točke. Skup međusobno kolinearnih točaka nazivamo **pravac**.
Dvoomjer parova točaka (A, B) **i** (C, D) je izraz

$$R(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$$

Neka su a, b, c, d četiri konkurentna pravca. Skup međusobno konkurentnih pravaca nazivamo **pramen**.
Neka je p_1 neki pravac koji siječe pravce a, b, c i d redom u točkama A_1, B_1, C_1 i D_1. Slično, neka je p_2 pravac različit od p_1 koji siječe iste pravce, u istom redoslijedu, u točkama A_2, B_2, C_2 i D_2.

Propozicija $R(A_1, B_1; C_1, D_1) = R(A_2, B_2; C_2, D_2)$
Stoga ima smisla definirati **dvoomjer parova pravaca** (a, b) **i** (c, d) izrazom

$$R(a, b; c, d) = R(A_1, B_1; C_1, D_1)$$

Ako je $R(A, B; C, D) = -1$, kažemo da točke A, B, C i D čine **harmoničku četvorku** (redoslijed točaka je bitan!). Kažemo i da su parovi (A, B) i (C, D) **harmonički konjugati**.

Neka su p_1 i p_2 dva različita pravca i P točka koja ne leži ni u jednom od ta dva pravca. **Perspektivitet s obzirom na P** je preslikavanje s p_1 u p_2 koje točku $A_1 \in p_1$ šalje u $A_2 \in p_2$ danu kao presjek pravaca PA_1 i p_2. Svako preslikavanje koje je kompozicija konačno mnogo perspektiviteta nazivamo **projektivitet**.

Teorem Svaki perspektivitet čuva dvoomjer parova točaka; posljedično i svaki projektivitet. Posebno, perspektiviteti (i projektiviteti) čuvaju harmoničku konjugiranost.

Propozicija Neka su A, B, C, D_1 i D_2 četiri kolinearne točke. Ako je $R(A, B; C, D_1) = R(A, B; C, D_2)$, tada je $D_1 = D_2$. Drugim riječima, projektivitet s tri fiksne točke je identiteta.

Propozicija Neka su A, B, C i D četiri različite točke. Ako je $R(A, B; C, D) = R(B, A; C, D)$ tada je $R(A, B; C, D) = -1$.

Nadalje, kažemo da su trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ **centralno perspektivni**, ako su pravci A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 konkurentni. Ako su pak točke $B_1C_1 \cap B_2C_2$, $A_1C_1 \cap A_2C_2$ i $A_1B_1 \cap A_2B_2$ kolinearne, kažemo da su trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ **osno perspektivni**.

Desarguesov teorem Dva trokuta su centralno perspektivna ako i samo ako su osno perspektivna.

Pappusov teorem Neka su A_1, A_2 i A_3 točke na pravcu a te B_1, B_2 i B_3 točke na pravcu b. Označimo $A_1B_2 \cap A_2B_1 = C_3$, $A_1B_3 \cap A_3B_1 = C_2$ i $A_2B_3 \cap A_3B_2 = C_1$. Tada su C_1, C_2 i C_3 kolinearne.

Pascalov teorem Neka su A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 i B_3 koniciklične točke. Označimo $A_1B_2 \cap A_2B_1 = C_3$, $A_1B_3 \cap A_3B_1 = C_2$ i $A_2B_3 \cap A_3B_2 = C_1$. Tada su C_1, C_2 i C_3 kolinearne.

Dana je kružnica k sa središtem S i polumjerom r te točka A različita od S. Neka je A' točka na polupravcu OA takva da je $|SA| \cdot |SA'| = r^2$. Pravac a kroz A okomit na OA zovemo **polara točke** A **s obzirom na**

kružnicu k. Točku A zovemo **pol od pravca** a **s obzirom na kružnicu** k.

La Hireov teorem Neka su A i B točke te a i b njima redom pripadne polare s obzirom na kružnicu $k(S, r)$. Tada je $A \in b$ ako i samo $B \in a$.
Sada ima smisla reći da su točke A i B konjugirane s obzirom na kružnicu k ako jedna točka leži u polari druge točke.

Brianchonov teorem Neka su A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 točke takve da je šesterokut $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ tangencijalan s upisanom kružnicom k. Tada su pravci $A1B_1$, A_2B_2 i A_3B_3 konkurentni.

Nepraktični zadaci

1. Neka je M polovište dužine $\overline{AB}$. Neka je P_∞ sjecište pravaca l_∞ i AB. Pokažite da je $(M, P_\infty; A, B)$ harmonička četvorka.

2. Dokažite (i iskažite) tvrdnju za proširenu euklidsku (projektivnu) ravninu iz koje se kao posebni slučaj dobiva poznata propozicija u euklidskoj (neproširenoj) ravnini: "Dijagonale paralelograma sijeku se u zajedničkom polovištu".

3. Ako su zadana dva centralno perspektivna trovrha ABC i $A'B'C'$, je li općenito moguće zadati točke D i D' tako da četverovrsi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ budu i centralno i osno perspektivni? (Pritom D i D' trebaju biti međusobno različite te različite od šest vrhova trovrha, kao i od njihovog centra perspektiviteta).

4. Dokažite Desarguesov teorem koristeći samo Pappusov teorem i aksiome projektivne ravnine.

Valjda praktični zadaci

5. Dan je trokut ABC; neka su M i N točke na BC. Dokažite da su AM i AN redom unutrašnja i vanjska simetrala kuta $\angle BAC$ ako i samo ako je $\angle MAN = 90$ i $(BCMN)$ je harmonijska četvorka.

6. U četverokutu $ABCD$ pravci AD i BC sijeku se u E, a pravci AB i CD u F. Dokažite da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ i $\overline{EF}$ kolinearna.

7. (**Brokardov teorem**) Dan je tetivni četverokut $ABCD$ i točka O središte njemu opisane kružnice. Neka su $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$ i $G = AC \cap BD$. Dokažite da je O ortocentar trokuta EFG.

8. (**Leptirov teorem**) Neka je M polovište tetive $\overline{PQ}$ kružnice k; neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ proizvoljne tetive kroz M tako da su točke A i C s iste strane od AB; neka su X i Y sjecišta tetive $\overline{PQ}$ s pravcima AD i BC, redom. Dokažite da je M polovište dužine $\overline{XY}$.

9. Neka je M proizvoljna točka na dijagonali $\overline{BD}$ paralelograma $ABCD$. Neka AM siječe CD i BC u K i N redom. Neka se kružnica oko M radijusa $|MA|$ i opisana kružnica trokutu KCN sijeku u P i Q. Dokažite da su MP i MQ tangente na kružnicu opisanu trokutu KCN.

10. Neka su D, E, F dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama BC, CA, AB redom. Neka je točka X unutar trokuta ABC takva da kružnica upisana trokutu XBC dira XB, XC i BC redom u Y, Z i D. Dokažite da je $EFZY$ tetivan.