J4	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Algebarski izrazi

Dorotea Bošnjak

09.11.2019.

Mladi nadareni matematičari
Marin Getaldić

Uvod

Osnovni algebarski izrazi

- kvadrat zbroja i razlike dvaju brojeva
  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- kub binoma
  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- razlika kvadrata
  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- zbroj i razlika kubova
  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- kvadrat trinoma
  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Faktorizacija

Faktorizacija algebarskih izraza je vrlo bitna jer se njom izrazi mogu bitno pojednostaviti.
Kako sve možemo faktorizirati algebarske izraze?

- izlučivanjem zajedničkog faktora
- grupiranjem članova
- prikazivanjem pojedinih članova u obliku zbroja ili razlike
- upotrebom gore navedenih formula

Zagrijavanje

1. Ako je jedan od pribrojnika u izrazu

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$$

   jednak nuli, tada je cijeli izraz jednak nuli. Dokažite.

2. Ako za brojeve a,b,c vrijedi $a+b+c=0$, dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3.$$

3. Pojednostavite izraz

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \cdot \frac{ab+bc+ca}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}} : \frac{1}{\frac{1}{abc}}.$$

4. Nađite vrijednost razlomka

$$\frac{a+b}{a-b}$$

   ako je $2a^2 + 2b^2 = 5ab$ i $0 < a < b$.

Umjereni zadaci

5. Dokažite da za svaki $a \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ vrijedi jednakost

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}=\frac{16}{1-a^{16}}.$$

6. Neka je $S=\{m \in \mathbb{Z} : m = a^2-5b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$. Pokažite da je umnožak dva elementa skupa S ponovno element skupa S.

7. (**Identitet Sophie Germain**) Faktorizirajte izraz a^4+4b^4.

8. Postoje li brojevi a,b,c za koje je izraz
$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}$$
jednak nuli ako ni jedan od pribrojnika nije jednak nuli i svi su pribrojnici definirani?

Primjena

9. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.

10. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj
    (*a*) n^3-n
    (*b*) $n^4+3n^3-n^2-3n$
    djeljiv sa 6.

11. Dokažite tvrdnje:
    (*a*) Ukoliko je razlika kvadrata dvaju prirodnih brojeva djeljiva s 2, onda je ona djeljiva i s 4.
    (*b*) Ne postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da su oba broja
    $$\sqrt{3^k+7}, \sqrt{3^{k+1}+7}$$
    istovremeno prirodna.

12. Izračunajte
$$\left(2013-\sqrt{1+2015\sqrt{1+2014\cdot 2012}}\right)^2$$

13. Korijen umnoška četiri uzastopna prirodna broja uvećanog za 1 je prirodan broj. Dokažite.

Zadaci s natjecanja

14. *Školsko natjecanje 2018., 2.razred, A varijanta*
    Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi
$$x^2+xy-4y^2=-1$$
$$4x^2+xy-11y^2=-2.$$

15. *Školsko natjecanje 2016., 2.razred, A varijanta*
    Neka je $a = 123456789$ i $N = a^3-2a^2-3a$. Dokaži da je broj N djeljiv s 540.

16. *Školsko natjecanje 2015., 1.razred, A varijanta*
    Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3+b^3=2ab(a+b)$.
    Odredi $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$.

17. *Školsko natjecanje 2014., 1.razred, A varijanta*
    Neka su a i b različiti realni brojevi i neka je $s=a-b$ i $t=a^3-b^3$.
    Izrazi $(a+b)^2$ pomoću s i t.

18. *Školsko natjecanje 2014., 1.razred, A varijanta*
Odredi realan broj a tako da $x = \frac{1}{2}$ bude rješenje jednadžbe

$$\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{x+1} - \frac{4x^2}{x^2-1}\right)\left(\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

19. *Školsko natjecanje 2012., 1.razred, A varijanta*
Neka je a realan broj. Odredi zbroj svih triju rješenja jednadžbe

$$x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a = 0.$$

20. *Školsko natjecanje 2012., 1.razred, A varijanta*
Ako je $a + b = 4$ i $a^2 + b^2 = 14$, odredi $a^3 + b^3$.

21. *Županijsko natjecanje 2017., 1.razred, A varijanta*
Izračunaj zbroj

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

22. *Županijsko natjecanje 2016., 1.razred, A varijanta*
    (*a*) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654.
    (*b*) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654.

23. *Županijsko natjecanje 2015., 1.razred, A varijanta*
Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \textbf{i} \quad B = \frac{x(x^2-1) - y(y^2-1)}{x-y}.$$

Odredi koji je broj veći, A ili B.

24. *Državno natjecanje 2016., 1.razred, A varijanta*
Neka su a, b i c prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}.$$

Dokaži da je c kvadrat nekog prirodnog broja.