S4	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Nejednakosti

Juraj Marušić

9. studenog 2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

U uvodu ćemo se upoznati s nekim osnovnim nejednakostima koje ćemo kasnije koristiti u rješavanju zadataka.

Svođenje na sumu kvadrata (SOS)
Jedna od osnovnih metoda rješavanja nejednakosti jest svođenje dane nejednakosti na sumu kvadrata, pa trivijalno slijedi da je ta suma nenegativna.

Primjer Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažimo da vrijedi $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \iff a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0 \quad \square$$

Nejednakosti među sredinama (KAGH)
Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ pozitivni realni brojevi. Tada vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Gornje sredine se redom zovu: kvadratna, aritmetička, geometrijska te harmonijska. Jednakost se postiže ako i samo ako su svi brojevi jednaki.

Primjer Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažimo da vrijedi $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

$$a^2 + b^2 \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{a^2 b^2} = 2|ab| \geq 2ab \quad \square$$

Cauchy-Schwarz–Bunyakovsky nejednakost (CSB)
Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ proizvoljni realni brojevi. Tada vrijedi sljedeća nejednakost:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da $a_i = \lambda b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$.

"And the love you gave me, nothing else can save me ... SOS"

1. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokažite da vrijedi:
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokažite da vrijedi:
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \geq ab - bc + ca$$

3. Dokažite da za realne brojeve x i y vrijedi:
$$(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \geq (x^3 + y^3)^2$$

4. Za $a, b, c \geq 0$ dokažite da vrijedi:
$$\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b)$$

Khm Khm Kagh Khm

5. Dokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi sljedeća nejednakost:

$$x(x-\sqrt{yz})+y(y-\sqrt{zx})+z(z-\sqrt{xy})\geq 0$$

6. (Nesbitova nejednakost) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokažite da tada vrijedi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

7. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2+b^2+c^2=3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$

8. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da vrijedi $x_1x_2 = x_2x_3 = \cdots = x_nx_1 = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq n^2$$

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Neka je $s := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$\frac{x_1}{s-x_1}+\frac{x_2}{s-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{s-x_n}\geq\frac{n}{n-1}$$

Sve i svašta

10. Neka su a, b, c tri realna broja koja zadovoljavaju $a+2b+c=4$. Dokažite da vrijedi:

$$ab+bc+ca\leq 4$$

11. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takvi da $a+b+c=2$. Dokažite da vrijedi:

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\leq 2$$

12. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da vrijedi $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ i $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Označimo s $a := \max\limits_{0<i\leq n} x_i$ i $b := \min\limits_{0<i\leq n} x_i$. Dokažite da vrijedi:

$$ab\leq\frac{-1}{n}$$

13. Neka je n prirodni broj. Dokažite da vrijedi:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$$

14. (CSB - Engel's form) Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi te $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite da tada vrijedi:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

15. Neka je $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom s pozitivnim koeficijentima. Ukoliko vrijedi nejednakost

$$P(\frac{1}{x})\geq\frac{1}{P(x)}$$

za $x = 1$, dokažite da tada nejednakost vrijedi za svaki $x > 0$.

16. Neka su h_a, h_b, h_c duljine visina trokuta ABC te r duljina polumjera upisane kružnice tom trokutu. Dokažite nejednakost

$$h_a+h_b+h_c\geq 9r$$

Hintovi

1. Iskoristimo $\frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0$.
2. Iskoristimo $(-a+b+c)^2 \geq 0$.
3. Primjetimo $(x^2y - xy^2)^2 \geq 0$.
4. Iskoristimo $\frac{1}{2}(a^2 - ab + b^2)(a-b)^2 \geq 0$.
5. Koristimo AG da pokažemo $\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq xy$ i $\frac{1}{2}(x^2+yz) \geq x\sqrt{yz}$.
6. Dodamo 3 na lijevu i desnu stranu.
7. Primjenimo AH nejednakost na izraz s lijeve strane.
8. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) + \cdots + \frac{1}{2}(x_n^2 + x_1^2)$
9. Dodamo n na lijevu i desnu stranu.
10. Primjetimo da vrijedi: $ab + bc + ac = (a+b)(b+c) - b^2$.
11. Vrijedi: $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \leq (ab + bc + ca)^2$.
12. Ocijenimo izraz $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)(x_i - b)$.
13. Primjetimo da vrijedi: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
14. Koristimo da je $b_i > 0$ pa je $\sqrt{b_i}$ dobro definiran. Namjestimo na CSB.
15. Namještanje na CSB.
16. Koristimo $P = rs$ i namještamo na CSB.