S8	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Jednadžbe i sustavi

Andrija Tomorad

23.11.2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

0.1 Kako rješavamo jednadžbe?

- Kako uloviti plavog slona? Puškom za plave slonove. A kako uloviti crvenog slona ? Obojimo ga u plavo pa puškom za plave slonove. Točno tako je s kvadratnim jednadžbama. - *Petar Bakić*

Vjerojatno znate kako riješiti linearnu jednadžbu oblika $ax = b$, dok složenije jednadžbe rješavamo ih tako da ih svodimo na jednostavnije primjenjujući iste operacije (funkcije) na obje strane znajući da nakon toga jednakost i dalje vrijedi. To može biti pribrajanje/oduzimanje nekog broja ili nepoznanice, množenje i dijeljenje nekim brojem ili izrazom, potenciranje, korjenovanje, itd. Na kraju želimo dobiti nešto oblika "$x = a$" pri čemu je a neki poznat realan broj, dakle želimo 'osloboditi' nepoznanicu, tj. ostaviti ju samu s jedne strane. Pritom moramo paziti da ne pravimo greške poput dijeljenja nulom ili korjenovanja negativnog broja.

0.2 Zašto provodimo provjeru?

Nije samo zato da se uvjerimo da nigdje nismo pogriješili u predznaku. Kad radimo neke operacije može se dogoditi da dobijemo neka nova rješenja koja nisu rješenja originalne jednadžbe (vidi primjer pod d) ili neka rješenja koja kad uvrstimo, jednadžba nema smisla (vidi primjer pod e).

0.3 O sustavima

Za sustave jednadžbi vrijedi sve što je navedeno, ali imamo još jedan koristan postupak - uvrštavanje jedne jednadžbe u drugu. Uvijek je legalno prepoznati da se negdje u jednadžbi A nalazi ono što je čitava lijeva (ili desna) strana jednadžbe B, zatim zamijeniti taj dio jednadžbe A drugom stranom jednadžbe B. Varijacija na ovu metodu je primjenjivanje bilo koje binarna operacije na obje jednadžbe. Prisjetite se metode supstitucije i metode suprotnih koeficijenata kod rješavanja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

0.4 Kako riješiti kvadratnu jednadžbu oblika $ax^2 + bx + c = 0$ ako je a različit od nule?

1. metoda faktorizacije - ne uspijeva uvijek (Zašto?) - svodimo na oblik $(x + p)(x + q) = 0$
2. metoda svođenja na potpuni kvadrat - uvijek uspijeva - svodimo na oblik $(x + r)^2 = s$

Riješite primjer pod c) i f)
Koliko realnih rješenja može kvadratna jednadžba imati? (uputa: promatraj oblik jednadžbe u drugoj metodi). Izrazi rješenja jednadžbe kod druge metode preko r i s, a zatim preko a, b, c. Nakon što izraziš rješenja preko a, b i c, kako odrediti broj realnih rješenja promatrajući a i b ? Izrazi zbroj i umnožak rješenja preko a, b i c (tzv. Vieteove formule).

0.5 Primjeri jednadžbi s jednom nepoznanicom:

a) $\frac{1}{3}x + 20 = \frac{1}{2}(x - 4) + 5$
b) $2|x - 3| + 6 = 14$
c) $x^2 + 2x - 3 = 0$
d) $\sqrt{x + 3} = x - 3$
e) $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{3x+2}{x^2-4}$
f) $x^2 + 4x + 2 = 0$

Ostali zadatci ovog predavanja neće svi nužno biti zadani kao jednadžbe realnih varijabli, ali će put ili bar dio puta do rješenja biti karakterističan za rješavanje jednadžbi i sustava.

Zagrijavanje/lakši zadaci

1. Riješi jednadžbe:
   a) $4^x - 2^{x+4} + 2^{x+2} + 32 = 0$
   b) $x^4 - x^2 - 72 = 0$
   c) $2x^3 - 7x^2 + 8x = 3$
2. Troje prijatelja zajedno obavljaju neki posao. Prvi može sam obaviti posao za 3 sata, drugi za 4 sata, a treći za 6 sati. Koliko će im vremena biti potrebno kad rade svi zajedno?
3. Žup 2017 1.A Gargamel je uhvatio N Štrumpfova i raspodijelio ih u tri vreće. Kad je Papu Štrumpfa iz prve vreće premjestio u drugu, Mrguda iz druge u treću, a Štrumpfetu iz treće u prvu, prosječna visina Štrumpfova u prvoj vreći se smanjila za 8 milimetara, a prosječne visine Štrumpfova u drugoj i trećoj vreći su se povećale redom za 5 milimetara i 8 milimetara. Ako je u prvoj vreći bilo devet Štrumpfova, odredi N.
4. Riješi ove sustave:
   a) $x - y = 7$, $xy = 18$
   b) $x^2 + 14 = 6y$, $y^2 + 4x = 1$
5. Žup 2018. 3.A Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Odredi omjer $\frac{b}{c}$ ako vrijedi:
$$a^2 - b^2 + c^2 = \sqrt{2}ac$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab$$
6. Žup 2016. 1.A Opseg pravokutnog trokuta je 18, a površina 9. Kolika mu je duljina hipotenuze?
7. Automobil se vozi jedan kilometar uzbrdo brzinom 25km/h. Kojom brzinom bi se trebao vraćati da mu srednja brzina (tijekom cijelog puta) bude 50 km/h.

Umjereni zadaci

8. Automobil se vozi brzinom 75km/h nizbrdo, 50km/h uzbrdo, a 60km/h po ravnoj cesti. Kolika je udaljenost između A i B ako vožnja u jednom smjeru traje tri sata, a u drugom tri i pol sata?
9. Riješi sustav jednadžbi:
$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 126$$
$$x + y - 12(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 36 + 2\sqrt{xy}$$
10. Žup 2019. 2.A Odredi vrijednost realnog parametra p tako da rijerenja jednadžbe $(p-3)x^2 + (p^2+1)x - 11p + 18 = 0$ budu duljine kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $\sqrt{17}$
11. Drž. 2013. 1.A Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi:
$$x^2 - y = z^2$$
$$y^2 - z = x^2$$
$$z^2 - x = y^2$$
12. Drž 2016. 1.A Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y+x} = \frac{1}{7}$$

Teži zadaci

13. Zup 2019. 4.A Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi:

$$(x^2+1)y = z^2+1$$
$$(y^2+1)z = x^2+1$$
$$(z^2+1)x = y^2+1$$

14. Drž 2014. 2.A Odredi sve parove (x, y) koji su rješenje sljedećeg sustava.

$$x + y^2 = y^3$$
$$y + x^2 = x^3$$

15. Drž 2014. 1.A Neka su $x_1, x_2, ..., x_{100}$ realni brojevi takvi da vrijedi:

$$|2x_k - x_{k+1}| = x_{k+2}$$
$$|2x_{99} - x_{100}| = x_1$$
$$|2x_{100} - x_1| = x_2$$

   Dokaži da vrijedi $x_1 = x_2 = ... = x_{100}$.

16. Drž 2018. 1.A Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi:

$$x + y - z = -1$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$
$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1$$