O7	Olimpijska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Teorija igara

Andrija Tomorad

16.11.2019.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

Uvod

0.1 Najosnovniji pojmovi:

Dva igrača A i B igraju sekvencijalnu igru koja ne može završiti bez pobjednika. Promotrimo poziciju u kojoj se A nalazi. Kažemo da je pozicija pobjednička ako igrač A iz nje može povući potez koji će mu garantirati pobjedu u igri. Za poziciju kažemo da je gubitnička pozicija ako, koji god potez odigrao, igrač B će u konačnici pobijediti. Ti pojmovi se odnose na igrača koji vuče potez (izlazi) iz zadane pozicije, a ne na onoga koji ulazi u nju. Kažemo da igrač A ima pobjedničku strategiju ako postoji niz poteza koji mu daje pobjedu neovisno o igri igrača B. Ako igrač A nema pobjedničku strategiju, kažemo da B ima negubitničku strategiju.

0.2 Korisni pristupi za zadatke iz teorije igara:

Indukcija - dokazujemo indukcijom da je $f(A)$ gubitnička pozicija ako je A gubitnička pozicija.
Simetrija - pronalazimo da za svaki potez igrača A postoji strategija igrača B da uvijek nalazi odgovor i tako ima negubitničku strategiju.
Invarijante i monovarijante - za neku strategiju promatramo način promjene ključnog parametra, te njegovu vrijednost na kraju i na početnoj poziciji, i pomoću toga dokazujemo da je pobjednička.
Strategy-stealing - ako u nekoj igri X igrač ima pobjedničku strategiju, a u igri Y igrač B može doći u poziciju ekvivalentu početnoj u igri X, igrač B ima pobjedničku strategiju u Y

0.3 Još nekoliko savjeta:

Uvijek ravmislite može li se definicija pozicije ili uvjet pobjede svesti na nešto praktičnije.
Uglavnom je na početku zadatka dobro pokušati pametno odabrati superpoziciju ili male primjere. Izbjegavajte počinjati s promatranjem potpuno *random* strategije ili pozicije. Iz malih primjera se gotovo uvijek može izvući nešto korisno, ali budite oprezni s vremenom.
Ako igra nema veze s formuliranjem P i G pozicijan, ne znači da nema smisla razmotriti kako će se završnica odigrati.

Zagrijavanje/lakši zadaci

1. Vlatka i Vlatko igraju igru s pravokutnom pločom dimenzija axb cm^2 i žetonima koji su međusobno istog radijusa r. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču da se ne preklapa s ostalima. Žeton ne treba nužno cijelom površinom biti unutar ploče. Ako Vlatka igra prva, tko ima pobjedničku strategiju?

2. *Dvostruki šah* je igra istih pravila kao šah, samo što igrači naizmjence vuku dva poteza. Dokaži da bijeli (koji igra prvi) ima negubitničku strategiju.

3. Mike i Sully igraju igru u kojoj naizmjence povlače poteze. U gornjem lijevom polju n x n ploče se nalazi bijela kraljica koju pomiče Mike u svojem potezu, a u gornjem desnom polju se nalazi crna kraljica koju pomiče Sully. Mike igra prvi. Na ostalim poljima ploče su sivi pijuni. U potezu je obavezno pomaknuti svoju figuru na zauzeto polje i uzeti figuru koja se tamo nalazi. Igrač kojem protivnik uzme figuru ili ostane bez poteza izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju ?

4. Marin Varivoda i Marin Getaldić igraju igru. Prvo Varivoda postavi 50 figura kraljeva na 100 x 100 ploču na bilo koja polja, zatim Getaldić postavi topa (kulu) na bilo koje polje. Nakon toga Varivoda u svakom svom potezu može pomaknuti točno dva kralja za jedno polje u bilo kojem smjeru (može i dijagonalno), a Getaldić može pomaknuti topa za bilo koji prirodan broj polja horiznontalno ili vertikalno, ali ne na polje na kojem se kralj nalazi niti preko njega. Igra završava kad Varivoda zarobi Getaldićevog topa i tada Varivoda pobjeđuje. Ima li Getaldić negubitničku strategiju?

5. Robert i Jimmy igraju igru sa šahovskom 8 x 8 pločom i figurom skakača. Naizmjence povlače sljedeće poteze. Prvo Robert postavi skakača na bilo koje polje, nakon toga ga svaki igrač (prvo Jimmy) pomakne kako se inače kreće u šahu, ali ne na polje na kojem je već bio. Igrač koji ne može napraviti potez, izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju?

Umjereni zadaci

6. Dva igrača naizmjence povlače poteze u sljedećoj igri. Na ploči su zapisani neki prirodni brojevi, te je u svakom potezu dozvoljeno obrisati dva relativno prosta broja i zapisati njihov zbroj. Tko ne može povući potez, izgubio je. Dokaži da drugi igrač pobjeđuje ako je na ploči na početku zapisano a) 2019 jedinica b)2020 jedinica?

7. *Chomp* je igra s pločom m x n čokolade za dva igrača. U potezu je dozvoljeno odabrati jednu "kockicu i odlomiti sve što se nalazi dolje ili desno u odnosu na odabranu. Tj. ako je "kockica" u gornjem lijevom kutu $(1, 1)$, u donjem desnom (m, n), a odabrana "kockica" (k, l). Preostati će samo one (i, j) t.d. je $i < k$ ili $j < l$. Dva igrača su optimalno igrala točno jednom svaki *Chomp* u kojem su m i n prirodni i ne veći od 10. Koliko je puta pobijedio prvi igrač?

   BONUS ZADATAK Koliko puta prvi igrač pobjeđuje za nxw ploču (ovaj put nije prava čokolada) dok n nije veći od 100? Pritom je w prebrojiva beskonačnost. Tj. na početku postoji svaki (i, j) ako i samo ako je $0 < i < n$ i $0 < j$.

8. Roger i David igraju sljedeću igru. Pred njima su tri kutije u kojima je redom 100, 101, i 102 pravilne trostrane prizme. Roger igra prvi. U potezu je dozvoljeno uzeti točno jednu prizmu iz jedne kutije ali ne iz one iz koje je suparnik u prošlom potezu uzimao. Tko ima pobjedničku strategiju?

9. Vlatka i Daniel igraju igru. Prvo Vlatka zapiše prirodan broj n na ploču, zatim naizmjence povlače sljedeće poteze. Daniel briše Vlatkin broj n i piše $m = n - a^2$ uz uvjet da nije negativan i da je a prirodan, a Vlatka briše Danielov broj m i piše $n = m^k$, k prirodan. Daniel pobjeđuje ako zapiše nulu. Može li Vlatka spriječiti Danielovu pobjedu?

Teži zadaci

10. Woody i Buzz igraju sljedeću igru. Na stolu je $N > 1$ karata. U prvom potezu Woody uzme barem jednu, ali ne sve karte sa stola. Nakon toga igraju naizmjence (prvo Buzz) i svaki igrač može uzeti barem jednu, ali ne više od $2m$ pri čemu je m broj karti koje je njegov suparnik uzeo u neposredno prethodnom potezu. Za koje N Buzz ima pobjedničku strategiju?

11. Syd i David igraju igru u kojoj naizmjence povlače poteze. David igra prvi. Na ploči su zapisana prirodna broja (a, b). U potezu je moguće obrisati broj koji nije manji i zapisati taj broj umanjen za višekratnik onog drugog broja uz uvjet da nije negativan, tj. za $a > b$ (ili $a = b$) brišemo a i pišemo $a–kb$ pri čemu je k prirodni broj manji ili jednak $\frac{a}{b}$. Pobjeđuje onaj tko zapiše nulu. Tko ima pobjedničku strategiju ovisno o (a, b)?

12. Paul i Art igraju igru. Zadano je n točaka u ravnini koje formijaju pravilni mnogokut, n je neparan i veći od 3. Naizmjence brišu jednu točku u svakom potezu, onaj koji prvi postigne da svi trokuti čiji su vrhovi preostale točke budu tupokutni, pobjeđuje. Paul igra prvi. Tko ima pobjedničku strategiju ovisno o n?

13. Jim i Ray igraju sljedeću igru. Zadana je ploča s $m + 1$ horizontalnih i m vertikalnih pravaca. Kamen se nalazi na nekom sjecištu najdonjem horizontalnog i nekog vertikalnog pravca. Jim igra prvi. Igrači naizmjence povlače poteze u kojima pomaknu kamen po jediničnoj dužini do susjednog sjecišta, ali ne dužinom kojom je kamen već prošao (bez obzira na smjer). Igrač koji ne može povući potez, izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju?