S9	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Diofantske jednadžbe

Goran Ivanković

30.11.2019.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

U ovom predavanju ćete (nadam se) naučiti što su diofantske jednadžbe te neke od osnovnih metoda za njihovo rješavanje. Diofantske jednadžbe su jednadžbe koje pronalaze svoja rješenja u skupu prirodnih ili cijelih brojeva. Njihovo rješavanje uglavnom se svodi na pronalazak jednog ili više rješenja te dokaz da su ona ustvari i jedina (ili da ih uopće nema).

Linearne diofantske jednadžbe:

Linearne diofantske jednadžbe imaju oblik $ax + by = c$ za $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Teorem: Neka je $ax+bx = c$ linearna jednadžba takva da je $a^2+b^2 \neq 0$. Ta jednadžba ima rješenje ako i samo ako M(a,b) dijeli c. Dokaz ovog teorema možete pronaći u skripti A. Dujella *Uvod u Teoriju brojeva*, 75.str. Primjer ovakve jednadžbe ću izostaviti, jer je rješavanje krajnje jednostavno.

Metoda faktorizacije:

Cilj ove metode je s jedne strane jednadžbe dobiti cjelobrojne faktore, a s druge strane cijeli broj.
Primjer 1: Riješimo jednadžbu $xy-2x+y = 5$ za $x, y \in \mathbb{Z}$. Oduzmemo li s obje strane 2 dobivamo $xy-2x+y-2 = 3$. Pokušajmo faktorizirati lijevu stranu:

$$x(y-2) + y - 2 = 3$$

$$(x+1)(y-2) = 3$$

Budući da je $x+1, y-2 \in \mathbb{Z}$, imamo 4 slučaja. I) $x+1 = 3$, $y-2 = 1$, II) $x+1 = -3$, $y-2 = -1$, III) $x+1 = 1$, $y-2 = 3$ i IV) $x+1 = -1$, $y-2 = -3$. To jest rješenja (x, y) su $(2, 3)$, $(-4, 1)$, $(0, 5)$, $(-2, -1)$. Uz ovu metodu često je korisna supstitucja, kako biste si olakšali faktoriziranje.

Metoda kongruencija:

Želimo li dokazati da diofantska jednadžba nema rješenja možemo pokazati da su ostaci s lijeve i desne strane pri dijeljenju s nekim brojem različiti.
Primjer 2: Riješi jednadžbu u skupu prirodnih brojeva $x^2 - 4y + 7 = 0$. Slijedi $x^2 = 4y - 1$. $4y - 7 \equiv 3$ (MOD 4). No ovo je nemoguće jer kvadrati uvijek daju ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju sa 4.

Metoda nejednakosti:

Primjer 3: Riješi jednadžbu u skupu prirodnih brojeva $3^x + 4^x = 5^x$. Očito je $x = 2$ jedno rješenje ove jednadžbe. DIjeljenjem zadane jednadžbe s 5^x dobivamo

$$(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$$

Za $x < 2$ je $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x > (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, a za $x > 2$ je $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x < (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$ te osim x=2 jednadžba nema drugih rješenja.

Lakši zadaci

1. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + 11^2 = y^2$.
2. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^3 - y^3 = 91$.
3. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu
$$mn^2 = 100(n + 1)$$
4. Neka je $P(x)$ polinom sa cjelobrojnim koeficijentima koji zadovoljava $P(17) = 10$ i $P(24) = 17$. Ako jednadžba $P(n) = n + 3$ ima dva različita cjelobrojna rješenja n_1 i n_2, nađi $n_1 \cdot n_2$.
5. Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (a,b) koji zadovoljavaju jednadžbu:
$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13.$$
6. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$10x^3 + 20y^3 + 8xyz = 1999z^3.$$

Srednji zadaci

7. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi $m^3 + n^3 = (m + n)^2$
8. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu
$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$$
.
9. Dokažite da za svaki $n \geq 3$ postoje neparni brojevi x i y takvi da je $2n = 7x^2 + y^2$.
10. Odredi sva rješenja jednadžbe $3^x = 2^x y + 1$ u skupu prirodnih brojeva.

Samo za nadobudne

11. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi x, y, z takvi da je:
$$x^4 + y^4 = z^2$$
12. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva tako da je $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

Rješenja

1. Županijsko natjecanje 2007 SŠ1 A 1 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2007/2007-SS-zup-1234-AB-zad+rj/2007-SS-zup-1234-A-zad%2Brj.pdf
2. Općinsko natjecanje 2008 SŠ2 A 1 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2008/2008-SS-opc-1234-AB-zad+rj/2008-SS-opc-1234-A-zad%2Brj.pdf
3. Općinsko natjecanje 2017, SŠ3 A 4 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2017/2017-SS-skolsko-1234-zad+rj/2017-SS-skolsko-A-1234-rj.pdf
4. AOPS https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2005_AIME_II_Problems/Problem_13
5. Županijsko natjecanje 2010 SŠ1 A 1 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2010/2010-SS-zup-1234-AB-zad+rj/2010-SS-zup-1234-A-rj.pdf
6. Županijsko natjecanje 1999 SŠ2 A 3 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1999/1999-SS-zup-1234-zad+rj/1999-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf
7. Državno natjecanje 2006 SŠ2 A 1 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2006/2006-SS-drz-1234-AB-zad+rj/2006-SS-drz-1234-A-zad%2Brj.pdf
8. Državno natjecanje 2011 SŠ3 A 2 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2011/2011-SS-drz-1234-AB-zad+rj/2011-SS-drz-1234-A-rj.pdf
9. Županijsko natjecanje 1995 SŠ4 A 3 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1995/1995-SS-zup-1234-zad+rj/1995-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf
10. Izborno 2006 - https://www.skoljka.org/solution/101/
11. Veliki fermatov teorem za n = 4 - http://math.uga.edu/~pete/4400flt4.pdf
12. IMO Shortlist 2006 problem N1 - https://www.skoljka.org/solution/43/