J15	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Sustavi jednadžbi

Goran Ivanković

8.2.2020.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Cilj ovog predavanja je da se bolje upoznate sa sustavima jednadžbi te metodama za njihovo rješavanje. Počet ćemo od linearnih sustava jednadžbi, prvo s jednom nepoznanicom pa polako prijeći na više njih. Na kraju ćemo pokazati i nešto o nelinearnim sustavima jednadžbi.

Linearne jednadžbe:

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom jest jednadžba oblika $ax = b$, gdje su a i b realni brojevi td. je $a \neq 0$, a x nepoznanica.
Linearna jednadžba s dvjema nepoznanicama jest jednadžba oblika $ax + by = c$, gdje su a, b, c realni brojevi td su $a, b \neq 0$, a x i y nepoznanice. Rješenje linearne jednadžbe jest svaki uređeni par (x, y) koji zadovoljava tu jednadžbu.
Linearna jednadžba s n nepoznanica jest jednadžba oblika $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi td su $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nepoznanice. Rješenje linearne jednadžbe jest svaki uređeni par $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koji zadovoljava tu jednadžbu.

Primjer 1: Pokušajmo riješiti jednadžbu $2x+3y = 8$. Nagađanjem rješenja vidimo i da $(4, 0)$ i $(1, 2)$ zadovoljavaju jednadžbu, a kratkim računom uvjeravamo se da ih ima beskonačno, tj. za bilo koji y postoji $x = \frac{8-3y}{2}$ takav da (x, y) zadovoljava jednadžbu.

Sustav m jednadžbi s n nepoznanica je skup m jednadžbi bilo kakvog oblika, sa sveukupno n nepoznanica. Rješenje sustava je uređena n-torka koja zadovoljava svih m jednadžbi. Jednadžbe sustava označavamo vitičastom zagradom, primjerice:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 7x - 2y = 5 \end{cases}$$

Sustav linearnih jednadžbi je sustav jednadžbi kojem su sve jednadžbe linearne.

Najjednostavniji način rješavanja sustava linearnih jednadžbi je supstitucija. Iz prve (ili bilo koje) jednadžbe izrazimo jednu nepoznanicu pomoću ostalih te dobiveni izraz uvrstimo u sve ostale jednadžbe. Tako ćemo dobiti sustav s jednom manje jednadžbom i jednom manje nepoznanicom. Ponavljamo ovaj postupak sve dok ne dođemo do neke nepoznanice (u sustavu s dvije nepoznanice ovo će biti iznimno brzo). Tu nepoznanicu uvrštavamo u prethodne izraze te tako dobivamo ostala rješenja, jedno po jedno.

Primjer 2: Riješimo sada sustav:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 7x - 2y = 5 \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe dobivamo $x = \frac{8-5y}{3}$. Uvrstimo li to u drugu jednadžbu dobivamo $56 - 35y - 6y = 15$. Tj. $y = 1$, odnosno $x = \frac{8-5}{3} = 1$. Dakle rješenje sustava je uređena dvojka $(1, 1)$. Kratkom provjerom vidimo da doista zadovoljava i prvu i drugu jednadžbu.

Jednadžbe također možemo zbrajati, oduzimati i množiti međusobno. Na taj način možemo "pokratiti" nepoznanice. Ova metoda mnogo je elegantnija za veće sustave jer nema uvrštavanja kompliciranih razlomaka u puno jednadžbi.

Poznati identiteti Sljedeći izrazi vrijede te su vrlo korisni u rješavanju algebarskih zadataka.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Preostale trikove za rješavanje sustava jednadžbi najbolje ćete otkriti rješavajući ove zadatke. Na kraju se nalaze i njihova rješenja.

Lakši zadaci

1. Riješite sustav

$$\begin{cases} x+2y+3z=12 \\ 4x+3y+8z=6 \\ 3x+7y+11z=3 \end{cases}$$

2. Odredi najmanji prirodan broj koji pomnožen s 3 postaje kvadrat nekog prirodnog broja, a pomnožen s 5 postaje kub nekog prirodnog broja.

3. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3+b^3=2ab(a+b)$. Odredi $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$

4. Riješite sustav

$$x_1+a_2x_2=x_2+a_3x_3=x_3+a_4x_4=x_4+a_5x_5=x_5+a_1x_1=1$$

, gdje je $a_1a_2a_3a_4a_5 \neq -1$

5. Odredite sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_{2004} &= 2004, \\ x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{2004}^4 &= x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{2004}^3. \end{aligned}$$

6. Odredi sve parove realnih brojeva (x,y) za koje vrijedi

$$x^2+xy-4y^2=-1$$

$$4x^2+xy-11y^2=-2$$

7. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$$

.

Teži zadaci

8. Odredite sva rješenja sustava jednadžbi: $\begin{cases} x^2-y=z^2 \\ y^2-z=x^2 \\ z^2-x=y^2 \end{cases}$

9. Postoje li realni brojevi x, y, z takvi da vrijedi

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=-5 \qquad \text{i} \qquad \frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}=8?$$

10. Nađite rješenja jednadžbe $x^4+y^4+z^4=4xyz-1$

11. Realni brojevi a i b zadovoljavaju ove jednakosti:

$$a^3-3ab^2=44, \quad b^3-3a^2b=8.$$

Koliko je a^2+b^2?

12. Ako je

$$\begin{aligned} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2, \\ x^{-1}+y^{-1}+z^{-1} &= c^{-1}, \end{aligned}$$

odredite $x^3+y^3+z^3$.

Rješenja

1. Rješenja (43.5,36,-34.5)
2. ŽUPANIJSKO - 8. razred-osnovna škola http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2014/2014-OS-zupanijsko-45678-zad+rj/2014-OS-zupanijsko-8-rj.pdf
3. Opcinsko 2015. 1. razred http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2015/2015-SS-skolsko-1234-zad+rj/2015-SS-skolsko-A-1234-rj.pdf
4. Općinsko 1994 1. razred - 4 http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1994/1994-SS-opc-1234-zad+rj/1994-SS-opc-1234-zad%2Brj.pdf
5. Općinsko natjecanje 2004 SŠ1 4 http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2004/2004-SS-opc-1234-zad+rj/2004-SS-opc-1234-zad%2Brj.pdf
6. Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2018, SŠ2 A 4 http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2018/2018-SS-skolsko-1234-zad+rj/2018-SS-skolsko-A-1234-rj.pdf
7. Zupanijsko 2004. 2. razred http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2004/2004-SS-zup-1234-zad+rj/2004-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf
8. Držzavno 2013. 1. razred -1 http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2013/2013-SS-drz-1234-zad+rj/2013-SS-drz-1234-A-rj.pdf
9. Županijsko natjecanje 2014 SŠ1 3 http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2014/2014-SS-zupanijsko-1234-zad+rj/2014-SS-zupanijsko-A-1234-rj.pdf
10. primijenimo AG nejednakost na lijevu stranu, dobivamo jedina rješenja su (1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)
11. Županijsko natjecanje 2000 SŠ1 3 http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2000/2000-SS-zup-1234-zad+rj/2000-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf
12. Županijsko natjecanje 1998 SŠ1 2 https://www.skoljka.org/solution/2217/