O10	Olimpijska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Izogonalne konjugate

Krunoslav Ivanović

7. prosinca 2020.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

Uvod

Tekst.

Lakši zadaci

1. Neka se tangente na opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ u točkama B i C sijeku u točki X. Ako je M polovište stranice BC, dokažite da su pravci AX i AM izogonalni s obzirom na $\angle A$. (Pravac AX nazivamo simedijanom trokuta $\triangle ABC$.)

2. Neka je točka P na kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$ i neka su D, E i F preslike točke P preko stranica BC, CA i AB redom. Dokažite da točke D, E i F leže na pravcu koji prolazi kroz ortocentar trokuta $\triangle ABC$.

3. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Neka je E sjecište dijagonala AC i BD i neka su P, Q, R nožišta okomica iz E na AB, BC, DA redom. Neka je S polovište stranice AB. Dokaži da je $PSQR$ tetivan.

4. Neka su D i E točke na $\overline{BC}$ takve da su $\overline{AD}$ i $\overline{AE}$ izogonalni s obzirom na $\angle BAC$. Dokaži da je onda
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

5. Neka je P točka u ravnini trokuta $\triangle ABC$ i neka je Q izogonalna konjugata točke P s obzirom na $\triangle ABC$. Dokaži da je
$$\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BQ}{BA \cdot BC} + \frac{CP \cdot CQ}{CA \cdot CB} = 1.$$

6. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut čije se dijagonale AC i BD Sijeku u E. Polupravci DA i CB sijeku se u F. Neka je G točka takva da je $ECGD$ paralelogram i neka je H preslika od E preko AD. Dokaži da su D, H, F, G konciklične.

7. Neka je $ABCD$ četverokut i neka je $P = AC \cap BD$, $E = AD \cap BC$ i $F = AB \cap CD$. Označimo s $\text{isog}_{XYZ}(P)$ izogonalnu konjugatu točke P s obzirom na $\triangle XYZ$. Ako je $AC \perp BD$, dokaži da je $\text{isog}_{ABE}(P) = \text{isog}_{CDE}(P) = \text{isog}_{ADF}(P) = \text{isog}_{BCF}(P)$.

8. Neka je $\triangle ABC$ i neka je M polovište stranice BC. Neka simetrale stranica AB i AC sijeku AM u D i E redom. Pravci BD i CE sijeku se u F. Ako je O centar opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$, dokaži da točke A, F, O i polovišta stranica AB i AC leže na kružnici.