08	Olimpijska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Polinomi

Luka Kraljević

23.11.2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

---

Uvod

Osnovni Teorem Algebre:
Polinom P(x) stupnja n sa kompleksnim koeficijentima ima n kompleksnih korijena. Može biti jedinstveno prikazan na sljedeći način

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

Vieta:
Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sa kompleksnim korijenima $r_1, r_2, \cdots, r_n$. Tada:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = (-1)^1 \frac{a_{n-1}}{a_n}; \ \sum_{i<j} r_i r_j = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n}; \ \cdots \ r_1 r_2 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Bezout:
Polinom $P(x)$ je djeljiv sa $(x - a)$ akko $P(a) = 0$.

Onaj korisni teorem
Ukoliko $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, i a i b su cijeli brojevi, tada

$$a - b \mid P(a) - P(b)$$

Zadaci

1. Neka je $P(x)$ polinom stupnja n takav da je
$$P(k) = \frac{k}{k+1} \ \ \forall k \in 0, 1, \cdots, n$$
Odredi $P(n+1)$

2. Neka je $P(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ polinom sa cijelobrojnim koeficijentima takav da je $|a_0|$ prost i da je
$$|a_0| > |a_1 + a_2 + \cdots + n|$$
Dokaži da je $P(x)$ ireducibilan.

3. Neka je $P(x)$ polinom sa cijelobrojnim koeficijentima, tako da je apsolutna vrijednost svakog koeficijenta manja ili jednaka 2018 i $P(2020)$ je prost broj. Dokaži da je $P(x)$ ireducibilan u Z[x]

4. (IMO SL 2005) Neka su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $S = a + b + c + d + e + f$ dijeli i $abc + def$ i $ab + bc + ca - de - ef - fd$. Dokaži da je S složen broj.

5. Pretpostavimo da je polinom $(x+1)^n - 1$ djelijv s nekim polinomom
$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + ... + c_1 x + c_0$$
čiji je stupanj k paran i koeficijenti $c_{k+1}, ..., c_1, c_0$ neparni. Dokaži da $k + 1 \mid n$
.