



Uvod

U geometriji često koristimo kuteve da dođemo do onoga što nas zanima, no ponekad to nije dosta. Ideja kosrištenja duljina dužina i sličnosti trokuta također nam mogu davati jako korisne rezultate u jako maloj količini vremena. Takva je i ideja potencije točke koje ćemo malo dublje proraditi u ovom predavanju.

Teorem o potenciji točke

Neka je se 2 pravca p i q sijeku u točki T . Na pravcu p izabrane su točke A i B te su na q izabrane C i D tako da su A i D bliže T nego B i C . Također točka T mora biti ili između točaka A i B te C i D ili nije između niti jednog od tih parova. Vrijedi da je $ABCD$ tetivan četverokut ako i samo ako vrijedi $TA \cdot TB = TC \cdot TD$.

Dokaz

Predopostavimo da je $ABCD$ tetivan četverokut te neka se pravci AB i CD sijeku u T . Primjetimo da su trokuti $\triangle TAD$ i $\triangle TCB$ slični jer dijele kut kod vrha T i zbog tetivnosti vrijedi $\angle TDA = \angle TBC$. Sada znamo da je $\frac{TA}{TD} = \frac{TC}{TB}$ iz čega slijedi $TA \cdot TB = TC \cdot TD$. U drugom smjeru isto zaključujemo jer odmah iz omjera dobivamo sličnost pa prema tome i jednakost $\angle TDA = \angle TBC$ iz čega zaključujemo da je $ABCD$ tetivan četverokut.

Iznos $TA \cdot TB$ zovemo potencija točke na kružnicu opisanu $ABCD$. Iz priloženog vidimo da je taj izraz uvijek isti bez obzira koji pravac provučemo kroz danu kružnicu sve dok je točka T fiksna.

Primjetimo također da ako je iz T povučena tangenta na kružnicu k u X vrijedi $TX^2 = TA \cdot TB$ tj. potencija točke T na kružnicu k iznosi TX^2 . Uzmimo da je O središte kružnice k , tada po pitagorinom pučku vrijedi $TX^2 = OT^2 - OX^2 = OT^2 - R^2$.

Radikalna os

Radikalna os je skup svih točaka P pa za koje vrijedi da je $Pow(P, k_1) = Pow(P, k_2)$ (potencija točke iz P na kružnicu k_1). Taj skup je pravac koji je okomit na pravac koji spaja središta kružnica k_1 i k_2 .

Radikalno središte

Radikalno središte je točka P takva da vrijedi $Pow(P, k_1) = Pow(P, k_2) = Pow(P, k_3)$. Ono postoji jer ako gledamo sjecište radikalnih osi kružnica k_1 i k_2 odnosno k_2 i k_3 dobivamo $Pow(P, k_1) = Pow(P, k_2)$ i $Pow(P, k_2) = Pow(P, k_3)$ iz čega slijedi $Pow(P, k_1) = Pow(P, k_3)$ dakle P leži na radikalnoj osi k_1 i k_3 također.

Koaksijalne kružnice

Kružnice sa istom radikalnom osi imaju sva središta kolinearna. Ponekad je u zadacima korisno dokazati da 3 kružnice imaju zajedničku radikalnu os iz čega odmah slijedi da su im središta kolinearna te s time pokazati neku vrstu kolinearnosti.

Lakši zadaci

1. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u A i B . Neka zajednička tangenta tih kružnica dira k_1 u X i k_2 u Y . Dokaži da pravac AB raspolavlja XY .
2. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut i neka se T presjek pravaca AB i CD . Neka je E polovište AT i F polovište TC . Dokaži da je $EFDB$ tetivan četverokut.

3. Praci AB, CD i EF sijeku su jednoj točki. Ako su četverokuti $ABCD$ i $ABEF$ tetivni dokaži da je i $CDEF$ tetivan četverokut.

Srednje teški zadaci

4. Dvije kružnice k_1 i k_2 sijeku se u M i N . Neka je l zajednička tangenta k_1 i k_2 koja je bliže M . l dira k_1 u A i k_2 u B . Pravac kroz M paralelan sa l siječe k_1 u C i k_2 u D . Pravci CA i DB sijeku se u E ; pravci AN i CD sijeku se u P ; pravci BN i CD sijeku se u Q . Dokaži $EP = EQ$
5. (Eulerova relacija) U trokutu sa središtem upisane O , središtem upisane I , radijusom opisane R i radijusom upisane r . Dokaži da vrijedi

$$OI^2 = R(R - 2r)$$

6. Neka su k_1 i k_2 koncentrične kružnice t.d. je k_2 unutar k_1 . Neka je A točka na k_1 i B točka na k_2 tako da je AB tangenta na k_2 . Neka je C drugo sijecište AB sa k_1 , i neka je D polovište AB . Pravac koji prolazi kroz A siječe k_2 u E i F na takav način da simetrale stranica DE i CF sijeku u M na pravcu AB . Odredi vrijednost AM/MC .

Jako teški zadaci

7. Dan je pravokutan trokut $\triangle ABC$ sa pravim kutom u C , neka je D nožište visine iz C na AB . Neka je X točka unutar segmenta CD . Neka je K točka na segmentu tako da vrijedi $BK = BC$. Slično neka je točka L na segmentu BX tako da vrijedi $AL = AC$. Neka je M presjek AL i BK . Dokaži da $MK = ML$
8. Neka su A, B, C i D različite točke na pravcu u tom poretku. Kružnice sa promjerima AC i BD sijeku se u X i Y . XY siječe BC u Z . Neka je P točka na XY koja nije Z . Pravac CP siječe kružnicu sa promjerom AC u C i M , i pravac BP siječe kružnicu sa promjerom BD u B i N . Dokaži da su pravci AM, DN i XY konkurentni (sijeku se u jednoj točki).