

Uvod

Za uvod evo dva osnovna principa prebrojavanja:

1. Princip bijekcije - pridružimo svakom objektu nešto drugo, nešto što je lakše prebrojiti. Vrlo jasan primjer je sljedeći: Brojimo na koliko načina možemo u skupu od 14 elemenata odabrati njih 10. Možemo odabranom desetorici pridružiti onu četvoricu koja nije odabrana (to nam pokazuje da četveročlanih podskupova ima onoliko koliko ima deseteročlanih).
2. Princip kartezijevog umnožka - Neka je A skup od a elemenata, a B skup od b elemenata. Tada skup $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ ima ab elemenata. Posljedica toga jest da ako se prvi dio posla može odraditi na n_1 načina, drugi na $n_2, \dots$, a zadnji k -ti na n_k načina, onda se cijeli posao može obaviti na ukupno $n_1 n_2 \dots n_k$ načina.

UVODNI ZADATAK ZA PREBROJAVANJE: Na koliko načina se mogu dodijeliti četiri različite/iste nagrade na 10 osoba tako da svaka osoba može dobiti najviše jednu/četiri? Riješite sve četiri kombinacije.

Prisjetite se Dirichleta i invarijanti.

Evo vam još jedan savjet, često se gube bodovi na ovome. Natjecatelji često promatraju nešto što zovu "najgori slučaj", ali ga loše povežu s općim slučajem, tj. nedostaje im implikacija koja će dokazati opći slučaj preko najgorega. Promotrimo sljedeći zadatak u kojem se traži dokaz za skup $1, 2, 3, \dots, 2n$ prirodnih brojeva ima podskup od $n + 1$ elemenata među kojim su neka dva relativno prosta. Jasno je da ne možemo isto reći za podskup od n elemenata jer u skupu $2, 4, \dots, 2n$ nikoja dva nisu relativno prosta. No to nas može navesti na sljedeće nepotpuno rješenje: "Uzmimo sve parne brojeve iz $2, 4, \dots, 2n$ (to je 'najgori slučaj'...), to je n brojeva i treba nam još jedan. Koji god da uzmemo, imamo dva uzastopna broja koji moraju biti relativno prosti." Ovo rješenje pretpostavlja da je skup $2, 4, \dots, 2n$ jedini n -člani podskup koji nema par relativno prostih broja. Ako to nije dokazano, rješenje nije valjano. Riješite taj zadatak, pokušajte zaobići promatranje "najgoreg slučaja" umjesto da ga nadopunite. Dokažite i valjanost Dirichletovog principa bez korištenja "najgoreg slučaja".

Lakši zadaci

1. Kocka ima sve strane različite boje. Koliko ima kombinacija boja koje možemo vidjeti u istom trenutku? Neka je O proizvoljna točka u prostoru ("oko"). Strana kocke je viđena ako postoji neka točka T strogo unutar nje takva da dužina (segment) OT ne sadrži niti jednu točku kocke osim T .

BONUS ZADATAK: Pokušajte isto s ostalim platonovim tijelima.

2. Na koliko načine možemo popuniti 4×4 kvadrat brojevima $1, 2, \dots, 16$ (svaki broj točno jedanput) tako da suma svakog retka kao i suma svakog stupca bude neparna?
3. Na jednoj obali rijeke nalazi se 20 sela, a na drugoj 15. Na koliko načina možemo izgraditi mostove tako da svaki most povezuje točno dva sela, nikoja dva se ne sijeku te iz svakog sela u svako postoji put koji prolazi mostovima, ali ne cestama koje povezuju sela na istoj strani rijeke?
4. Robert i Jimmy igraju sljedeću igru u kojoj naizmjenice povlače poteze. Robert u svom potezu na bilo koje slobodno polje stavi plavi žeton, a Jimmy crveni žeton. Za svaki redak ili stupac Robert dobiva bod, ako ima više plavih nego crvenih žetona, a Jimmy ako ima više crvenih nego plavih žetona. Pobjeđuje onaj koji završi s više bodova. Tko ima pobjedničku strategiju?
5. Marin Getaldić je na ploču zapisao broj 2018^{2019} . Sada ponavlja sljedeći postupak dok ne dobije 10-znamenasti broj. Briše prvu znamenku i taj (jednoznamenasti) broj pribroji onome što ostane. Dokaži da su u dobivenom 10-znamenastom broju neke dvije znamenke iste.

Umjereni zadaci

6. Svaka točka u ravnini obojena je u jednu od k mogućih boja. Dokaži da postoji pravokutnik čije su sve točke iste boje.
7. U nekom sustavu su zvijezda i 11 planeta. Dokaži da postoji točka na zvijezdi koja se ne može vidjeti s više od 4 planeta. Nemoj pretpostavljati da su planeti postavljeni slično kao u Sunčevom sustavu, smije se samo pretpostaviti da svi planeti imaju manji radijus od zvijezde. "Viđenje" je definirano kao u prvom zadatku (samo što je točka O nužno na površini nekog planeta).
8. Dokažite da za svaki prirodni broj k postoji broj oblika $111\dots11000\dots00$ djeljiv s k .
9. Sedam dužina ima duljinu između 1m i 10m. Dokažite da postoje neke tri koje čine trokut.
10. Dokaži da među $k + 2$ brojeva manjih od $3k + 1$ postoje 2 čija je razlika veća od k i manja od $2k$. DRŽAVNO 2019. 1. razred A

Teži zadaci

11. Na vagi je nekoliko utega, na svakom piše jedno ili više imena. Možemo pozvati bilo koju osobu i ona će sve utege sa svojim imenom prebaciti na drugu stranu. Ako je na početku lijeva strana teža od desne, dokaži da je moguće postići da desna strana bude teža.
12. Zadan je skup $1, 2, 3, \dots, n$. Nađi najmanji n takav da nakon brisanja $p - 1$ brojeva uvijek ostane barem jedan aritmetički niz duljine p pri čemu je p prost. BONUS ZADATAK: dokažite da isto ne vrijedi ako p nije prost.
13. U ravnini je označeno 15 točaka. Neke su obojane crveno, neke plavo, a ostale zeleno. Poznato je da je broj crvenih točaka veći i od broja plavih i od broja zelenih točaka. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka crvena, a druga zelena iznosi 31. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka zelena, a druga plava iznosi 25. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka plava, a druga crvena iznosi 5. Odredi broj točaka svake boje.
14. Na ploči je napisano n jedinica. Dva igrača igraju igru. U potezu je dozvoljeno obrisati dva relativno prosta broja i napisati njihovu sumu. Onaj koji to ne može učiniti, izgubio je. Ovisno o n , koji igrač ima pobjedničku strategiju?
15. Ukrug je napisano 300 brojeva, na početku 299 nula i jedna jedinica. U potezu je dozvoljeno ili istovremeno oduzeti svakom broju njegova dva susjeda, ili odabrati par brojeva između kojih su točno dva broja te brojeve iz tog para ili oba povećati za 1 ili oba smanjiti za 1. Možemo li u konačno mnogo takvih poteza postići stanje s
 - a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula?
 - b) tri uzastopne jedinice i 297 nula?
16. Ovaj zadatak je na razini olimpijade, ali sadrži puno malih zaključaka povezanih s "najgorim slučajevima" i kako pravilno raditi s tim. Upravo to je poanta ovog zadatka na ovom predavanju.
 Neka je α realan broj. Posejdon i Hefest igraju igru. Zadana je beskonačna kvadratna mreža. Prvo posejdon odabere nekoliko polja koja postanu *poplavljena*, zatim naizmjenice povlače poteze (prvo Hefest), Hefest u svojem potezima gradi zid koji je jedna izlomljena crta po rubovima polja koja se ne siječe, a nakon njegovog n -tog poteza ne smije biti dulji od $n\alpha$ jediničnih dužina. Posejdon u svojem potezu poplavljuje sva polja koja tad imaju poplavljenog susjeda, osim ako zid prolazi njihovom granicom. Za koje α Hefest može osigurati da zid nakon konačno mnogo poteza bude zatvoren i da se sva poplavljena polja nađu unutar njega?