

Uvod

U ovom predavanju upoznat ćemo se s osnovnim principima prebrojavanja i primjenjivati ih u raznim kombinatornim zadacima. Prije samog prebrojavanja korisno je odrediti:

- Što točno želim prebrojati? Je li lakše prebrojati nešto s određenim svojstvom ili ono što nema to svojstvo pa oduzeti od ukupnog broja?
- Postoji li neka pravilnost? Mogu li ju uočiti raspisivajući male primjere?
- Mogu li primijeniti neku od karakterističnih metoda i principa (npr. metoda kuglica i štapića, indukcija, Dirichletov princip)?

Neki od osnovnih principa prebrojavanja:

- princip sume (broj elemenata unije disjunktih skupova jednak je sumi broja elemenata tih skupova - ako imamo 5 jabuka u jednoj košari i 4 kruške u drugoj košari tada imamo ukupno $5 + 4 = 9$ komada voća)
- princip produkta (broj elemenata Kartezijevog produkta konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata skupova - u ormaru imamo 3 jakne i 7 majici, tada imamo $3 \cdot 7 = 21$ parova (jakna, majica))
- princip kvocijenta (reformulacija principa produkta)
- princip bijekcije (dva su skupa ekvipotentna ako i samo ako postoji bijekcija između njih - ako svakoj lijevoj cipeli mogu jedinstveno pridružiti desnu cipelu tada ih imam jednako)
- princip matematičke indukcije (baza, pretpostavka i korak)
- Dirichletov princip (ako $k + 1$ zečeva želimo smjestiti u k kutija barem jedna kutija imat će više od 1 zeca)

Oznake:

- faktorijele: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$ (posebno, $0! = 1$)
- binomni koeficijent (n poverh k) označava broj k -članih podskupova n -članog skupa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Uvodni primjeri

- (a) Koliko ima različitih četveroznamenastih brojeva?
 - (b) Koliko ima različitih četveroznamenastih brojeva kojima su sve znamenke različite?
 - (c) Koliko ima različitih četveroznamenastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3?
 - (d) Koliko ima različitih četveroznamenastih brojeva koji sadrže točno jednu znamenku 5?
- (a) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 koji su djeljivi s 3?
 - (b) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 koji su djeljivi s 3 ili 4?
- Na koliko načina 10 učenika može stati u red?

4. *(malo teži zadatak, ali koristi vrlo bitnu ideju) Na koliko načina možemo od 10 različitih kuglica koje imamo na raspolaganju odabrati njih 7?

Lakši zadaci

5. Marin slaže sendvič za popodnevnu užinu. U hladnjaku mu je majka ostavila 2 različita peciva, 4 vrste sira te 3 različite šunke. Na koliko načina Marin može složiti svoj sendvič, ako između dvije polovice peciva želi staviti točno jednu vrstu sira i točno jednu vrstu šunke?
6. Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?
7. (a) Na koliko se različitih načina može postaviti n topova na šahovskoj ploči $n \times n$ tako da se topovi ne napadaju? Topove međusobno ne razlikujemo, a konfiguracije koje dobijemo rotiranjem ili zrcaljenjem smatramo različitim.
- (b) Koji bi odgovor bio u slučaju da topove razlikujemo jer su svi međusobno različite boje?
8. Na Zimskom matematičkom kampu 16 učenika i mentora odlučilo je odigrati partiju mafije. Igrači se dijele po ulogama od kojih je jedna voditelj igre. Dok se igra mafija svi sudionici osim voditelja igre moraju sjesti u krug.
- (a) Na koliko načina naših 15 učenika i mentora koji igraju mogu to učiniti? (Dva načina se smatraju istima ako se jedan može dobiti iz drugoga rotacijom kruga.)
- (b) Na koliko načina mogu to učiniti ako Petar i Ana svakako žele sjediti jedno do drugoga?
9. Koliko postoji peteroznamenastih parnih palindroma?

Umjereni zadaci

10. Zadan je dvanaesterokut s nacrtanim svim stranicama i dijagonalama. Na koliko načina možemo odabrati dužinu s krajnjim točkama u vrhovima dvanaesterokuta?
11. Koliko anagrama ima riječ *MATEMATIKA*?
12. Na koliko načina su učenici i mentori iz 7. zadatka mogli podijeliti uloge ako su uloge: 1 voditelj igre, 5 mafija, 2 doktora, 1 policajac i 7 civila?
13. Odjeljak vagona ima dvije klupe po 4 mjesta. Od 8 putnika njih 3 žele sjediti s licem okrenutim u smjeru vožnje vlaka, 2 u suprotnom smjeru, a ostalima je svejedno. Na koliko se načina putnici mogu smjestiti?

Teži zadaci

14. (a) Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od točke $(-1, 0)$ do točke $(5, 7)$?
- (b) Koliko je takvih puteva koji ne prolaze točkom $(2, 3)$?
15. Koliko ima peteroznamenastih prirodnih brojeva s parnim brojem parnih znamenaka?
16. Na raspolaganju imamo 7 olovaka. Na koliko različitih načina možemo odabrati olovke za ponijeti na predavanje? Možemo ponijeti između 0 i 7 olovaka, uključivo.
17. (a) Koliko pozitivnih djelitelja ima broj 600?
- (b) Koliko pozitivnih djelitelja ima proizvoljan prirodni broj n ?
18. 100 kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitim ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.
- Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?