

Uvod

Značenje. *fāntōm* (grč. φαντάσμα: pojava, priviđenje) -

1. Sablast, prikaza, priviđenje, utvara, avet. Često naziv i za stvarni, ali neidentificirani predmet, pojavu, osobu (osobito zločinca).
2. U medicini, vrsta lutke i umjetno izrađeni dio tijela, na kojem se vježbaju operacije, napose porođajne.

Ideja. Pretpostavimo da je točka T zadana kao presjek krivulja (krivulja je ovdje bilo koji geometrijski jednodimenzionalni objekt poput pravca, kružnice, konike itd.) $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ te je potrebno dokazati da leži na $\mathcal{C}_3$. Ukoliko "biti na $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$ " pruža mnogo više lijepih svojstava nego biti "biti na $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ ", primjenit ćemo tehniku **fantomiranja točke** koja se sastoji od sljedećih koraka:

1. Definirajmo točku T' koja leži na presjeku $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$ uz neki **uvjet** $\mathcal{P}$ koji ujedno i T zadovoljava (i taj presjek mora **postojati**).
2. Pokažimo da T' leži na $\mathcal{C}_1$ (možda koristimo uvjet $\mathcal{P}$).
3. Zaključimo da je onda $T = T'$ (jer je $T' \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{P}$, te dodatno moramo dokazati da je presjek $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{P}$ **jedinstven**), te je zbog toga $T \in \mathcal{C}_3$ (jer je $T' \in \mathcal{C}_3$).

Uočimo da je s logičke strane

- obavezno **postojanje** u prvom koraku jer ukoliko presjek ne postoji, iz samog definiranja odmah dolazimo u kontradikciju iz čega sve slijedi (*ex falso quodlibet*). Protuprimjer u ravnini $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = x \right\} \quad \mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = 0 \right\} \quad \mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = 1 \right\}$$

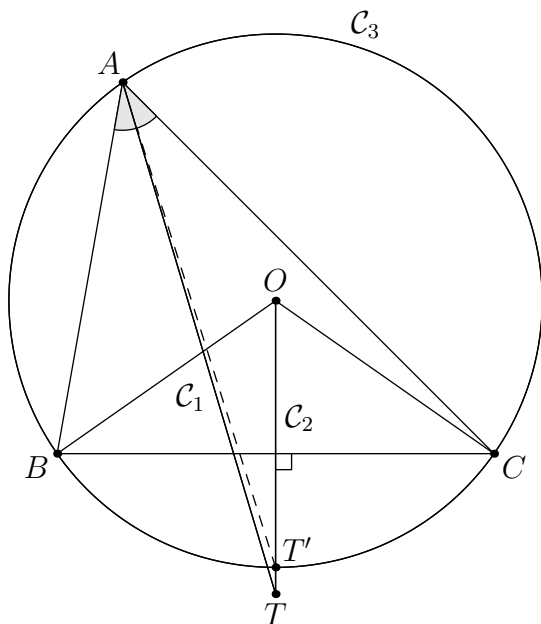
- obavezna **jedinstvenost** uz uvjet $\mathcal{P}$ u trećem koraku jer ukoliko presjek $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ nije jedinstven, ne možemo garantirati da je $T = T'$. Protuprimjer u ravnini $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = 0 \right\} \quad \mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1 \right\} \quad \mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = 1 \right\}$$

- nije obavezno korištenje uvjeta $\mathcal{P}$ u drugom koraku jer nam je jedino bitno da dokažemo da je $T' \in \mathcal{C}_1$ što je možda moguće i neovisno od $\mathcal{P}$, na primjer ako su $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$ neparalelni pravci.

Pouka. Postoje zadaci koje se ne mogu riješiti bez fantomiranja (ili je samo nemjerljivo teže), za koje je ova tehnika naprosto krucijalna, no takvih je vrlo malo. Većina zadataka je zapravo jednako teška rješavati *normalnim* poretom argumenata, dakle od pretpostavke do zaključka bez ikakvih reverznih trikova poput kontradikcije ili fantomiranja. Svejedno, tehnika se pokazuje izrazito jakom jer daje jako dobru intuiciju koji je predzadnji argument u našem dokazu, što je vrlo često najteži korak u rješenju. Razlog tomu je jer se krećemo za *besplatno* s cilja unatrag čime otkrivamo stvari koje bismo tek trebali dokazati što je korisno u usmjerevanju. Nešto slično tome su izreke "indukcija ništa ne košta" ili "pretpostavka minimalnosti ništa ne košta" koje često koristimo kada se susretnemo sa kombinatornim zadacima.

Primjer. Pokazat ćemo jedan primjer kako bismo konkretizirali ovu metodu. Neka je ABC trokut s $|AB| \neq |AC|$. Dokaži da se simetrala unutarnjeg kuta $\angle CAB$ i simetrale stranice $\overline{BC}$ sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC .



Postavimo:

- C_1 = simetrala unutarnjeg kuta $\angle CAB$
- C_2 = simetrala stranice $\overline{BC}$
- C_3 = opisana kružnica trokuta ABC
- P = suprotna strana od A u odnosu na pravac BC

Slijedimo korake:

1. Definirajmo točku T' koja leži na presjeku simetrale stranice $\overline{BC}$ i opisane kružnice trokuta ABC , i to na kraćem luku $\widehat{BC}$ (očito postoji).

2. Kako je O isto na simetrali stranice $\overline{BC}$, imamo

$$\angle T'AB = \frac{1}{2} \angle T'OB = \frac{1}{4} \angle COB = \frac{1}{2} \angle CAB$$

te je stoga T' na simetrali unutarnjeg kuta $\angle CAB$.

3. Kako je $|AB| \neq |AC|$, simetrala unutarnjeg kuta $\angle CAB$ i simetrala stranice $\overline{BC}$ imaju jedinstven presjek (onda je i pod uvjetom jedinstven), pa je $T = T'$. Stoga je T na opisanoj kružnici trokuta ABC .

Lakši zadaci

1. U trokutu ABC , neka je O središte opisane kružnice, H ortocentar, a M polovište stranice $\overline{BC}$.
 - (a) Dokaži da se AO i MH sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC .
 - (b) Dokaži da se opisana kružnica trokuta ABC i pravac MH sijeku na kružnici s promjerom AH .
2. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC , a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO , dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.
3. U jednakokraknom trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$ i $\angle BAC < 60^\circ$. Neka je točka D na dužini $\overline{AC}$ takva da je $\angle DBC = \angle BAC$, neka je E sjecište simetrale dužine $\overline{BD}$ i paralele s BC kroz točku A . Dokaži da su pravci BE i AC paralelni.

Teži zadaci

4. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P , a pravac AC u točki Q . Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC . Dokaži da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.
5. Dan je trokut ABC . Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M . Kružnica s promjerom BC siječe dužinu LM u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q . Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k .
6. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $|AB| > |AC|$. Neka je O središte kružnice opisane tom trokutu, a $\overline{OQ}$ promjer kružnice opisane trokutu BOC . Pravac paralelan s pravcem BC kroz A siječe pravac CQ u točki M , a pravac paralelan s pravcem CQ kroz A siječe pravac BC u točki N . Neka je T presjek pravaca AQ i MN . Dokaži da točka T leži na kružnici opisanoj trokutu BOC .

Zadatak s IMOa

7. Neka su P i Q na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC tako da je $\angle PAB = \angle BCA$ i $\angle CAQ = \angle ABC$. Točke M i N su na pravcima AP i AQ , redom, tako da je P polovište $\overline{AM}$ i Q polovište $\overline{AN}$. Dokaži da je presjek BM i CN na opisanoj kružnici trokuta ABC .