

# Teža simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

24. listopada 2020.

1.  $P(x)$  je normirani polinom trećeg stupnja sa nultočkama  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ . Ako za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi to da  $\alpha^k + \beta^k + \gamma^k \in \mathbb{Z}$ , dokaži da su onda svi koeficijenti od  $P(x)$  cijeli brojevi.

2. Odredi sve parove realnih brojeva  $(x, y)$  takve da je  $0 < x \leq y$  i vrijedi:

$$\sqrt[2020]{x^{2020} + y^{2020}} = (\sqrt[2020]{2} - 1)x + y$$

3. Postoji li aritmetički niz od 2020 prirodnih brojeva t.d. je svaki član tog niza potencija nekog prirodnog broja veća od 1.
4. Neka je  $O$  središte kružnice opisane  $\triangle ABC$ . Neka je kružnica  $\Omega$  proizvoljna takva da prolazi kroz  $B$  i  $C$ . Neka su  $D$  i  $E$  redom presjeci pravaca  $BO$  i  $CO$  s  $\Omega$  unutar  $\triangle ABC$ . Okomice iz  $D$  i  $E$  redom na stranice  $AB$  i  $AC$  sijeku se u  $M$ . Dokaži da su točke  $A, M$  i  $O$  kolinearne.
5. U ravnini je  $2^{2020} + 1$  točaka. Na svakoj dužini koja spaja neke dvije točke nalazi se broj iz skupa  $0, 1, \dots, 2^{2020} - 1$ . Za svake 3 točke  $A, B$  i  $C$  u ravnini vrijedi da je jedan od brojeva na dužinama  $\overline{AB}, \overline{BC}$  i  $\overline{AC}$  zbroj druga dva. Dokaži da postoji trokut u ravnini kojemu na svim stranicama pišu nule.