Lakša simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

24. listopada 2020.

1. Odredi sve konačne skupove S pozitivnih prirodnih brojeva za koje vrijedi da ako su $i, j \in S$ (može biti $i = j$) onda je i $\dfrac{i+j}{M(i,j)} \in S$. $M(a,b)$ označava najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.

2. Odredite sve proste brojeve p, q i r takve da je $p^{2q} + q^{2p} = r$.

3. Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Odredi maksimum od

$$\min\left\{a,\ \frac{1}{b}\ ,\ \frac{1}{a} + b\right\}$$

4. Dan je $\triangle ABC$ s opisanom kružnicom Ω. Neka su D i E točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom takve da vrijedi $|AD| = |AE|$. Neka pravci paralelni s DE kroz B i C sijeku Ω redom u točkama P i Q. Neka je w kružnica opisana $\triangle ADE$. Dokaži da se pravci PE i QD sijeku na w.

5. Neka je n prirodan broj veći od 2. Odredi sve skupove A s n elemenata takvih da suma elemenata niti jednog nepraznog podskupa od A nije djeljiva sa $n + 1$.

1. Pretpostavimo da S nije prazan skup, dakle postoji neki $x \in S$. Tada znamo da je i

$$\frac{x+x}{M(x,x)} = \frac{2x}{x} = 2 \in S$$

Dokazat ćemo da je svaki element skupa S paran. Pretpostavimo suprotno: postoji neki neparni broj $y \in S$. Zapišimo ga kao $y = 2m+1, m \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$\frac{2m+1+2}{M(2m+1,1)} = \frac{2m+3}{1} = 2m+3 \in S.$$

Jasno je da ovaj postupak možemo ponoviti beskonačno puta, dakle S nije konačan skup. Došli smo do kontradikcije, pa su svi brojevi u S parni.

Neka je $x = 2m, m \in \mathbb{N}, m > 1$ najmanji broj u S, no tada je i

$$\frac{2m+2}{M(2m,2)} = \frac{2(m+1)}{2} = m+1 \in S.$$

Kako je $2m > m+1$ to nam daje kontradikciju s minimalnošću broja x pa je jedino rješenje $S = \{2\}$.

2. Uvrštavanjem vidimo da $p = q = 2$ nije rješenje i da je $r > 4$. Pretpostavimo da su i p i q neparni: tada je $p^{2q} + q^{2p}$ parno, odnosno r je paran prost broj veći od 4 - kontradikcija.
Znači da je ili p ili q paran, ali s obzirom da su oba broja prosta i znamo da $p = q = 2$ nije rješenje, točno jedan od ta dva broja je jednak 2. Bez smanjenja općenitosti, neka je $p = 2$ jer je jednadžba simetrična po pitanju p i q (ako je (p,q) rješenje onda je i (q,p)). Početna jednadžba onda postaje

$$2^{2q} + q^4 = r \Rightarrow 4^q + q^4 = r.$$

Zadatku možemo dalje pristupiti na dva načina:

1. način.
Promotrimo ovaj izraz modulo 5. 4^q daje ostatak 1 ili -1 pri djeljenju s 5, ovisno o parnosti broja q (-1 ako je q neparan, a 1 ako je q paran). Kako smo zaključili da je q neparan, znači da 4^q daje ostatak -1 pri

dijeljenju s 5. S druge strane, q^4 daje ostatak 1 ili 0 pri dijeljenju s 5. Sada razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: q^4 je djeljiv s 5. Kako je q prost broj, a q^4 je djeljivo s 5 ako i samo ako je q djeljiv s 5, jedina mogućnost je $q = 5$. Preostaje provjeriti je li $4^5 + 5^4 = 1649$ prost broj. Kako je $1649 = 17 \cdot 97$, ovaj slučaj nema rješenja.
2. slučaj: q^4 daje ostatak 1 pri djeljenju s 5. Kako 4^q daje ostatak -1 pri djeljenju s 5, $4^q + q^4 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, odnosno r je djeljiv s 5. Kako je r prost broj, $r = 5$ je jedina mogućnost. Međutim, jednadžba $4^q + q^4 = 5$ nema rješenje u prostim brojevima jer $q = 1$ nije prost broj. Zaključujemo da ne postoje prosti brojevi p, q, r takvi da je $p^{2q} + q^{2p} = r$.

2. način.
Možemo koristiti tzv. *Sophie Germain identity*, koji nam daje faktorizaciju $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$. Znamo da je q neparan i veći ili jednak 3, pa ga možemo zapisati kao $q = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Dalje, ako promotrimo 4^q, možemo ga raspisati kao:

$$4^q = 4^{2k+1} = 4 \cdot 4^{2k} = 4 \cdot 2^{4k} = 4 \cdot (2^k)^4.$$

Sada je naš početni izraz postao $(2k + 1)^4 + 4 \cdot (2^k)^4$, na što možemo primijeniti prije spomenut identitet:

$$(2k + 1)^4 + 4 \cdot (2^k)^4 =$$

$$= ((2k+1)^2 + 2 \cdot (2^k)^2 - 2 \cdot (2k+1)2^k)((2k+1)^2 + 2 \cdot (2^k)^2 + 2 \cdot (2k+1)2^k) =$$

$$= ((2k + 1)^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}(2k + 1))((2k + 1)^2 + 2^{2k+1} + 2^{k+1}(2k + 1)).$$

Preostaje dokazati da je svaka od ovih zagrada veća od 1. Za $(2k + 1)^2 + 2^{2k+1} + 2^{k+1}(2k + 1)$ je to očito jer su svi članovi pozitivni i veći od 1. S druge strane, za $k \geq 3$ vrijedi $2^{2k+1} \geq 2^{k+1}(2k + 1)$ (dokaz ostavljamo vama za vježbu - indukcija ili nešto drugo...) pa je $(2k + 1)^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}(2k + 1) \geq (2k + 1)^2 > 1$. Preostaje još provjera za $k = 1$ i $k = 2$ (isto ostavljamo vama - samo uvrštavanje...)
Dobili smo da je $4^q + q^4$ uvijek složen broj pa ova jednadžba nema rješenja za p, q, r proste.

3. Uvedimo supstituciju $c = \dfrac{1}{b}$. Primijetimo da ako je $a = c = \sqrt{2}$, promatrani izraz jednak je $\sqrt{2}$. Dovoljno je promatrati slučaj kad su $a, c > \sqrt{2}$, u suprotnom je $\min\{a, \ \frac{1}{b} \ , \ \frac{1}{a} + b\} \ \leq \sqrt{2}$.

Pretpostavimo $a, c > \sqrt{2}$. Tada je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}$$

što nam daje maksimum minimuma manji od $\sqrt{2}$. Dakle, rješenje je uistinu $\sqrt{2}$.

4. Pretpostavimo da pravac QD siječe Ω u X_1.

Primijetimo da je $|\angle QX_1A| = |\angle QBA|$ jer su oba obodni kutevi nad AQ.
Uz to, budući da je $QBCA$ tetivan četverokut i $DE \parallel QC$, zaključujemo

$$|\angle QBA| = |\angle QCA| = |\angle DEA|$$

iz čega slijedi

$$|\angle QX_1A| = |\angle DX_1A| = |\angle DEA|$$

pa je DAX_1E tetivan četverokut.

Analogno definirajmo X_2 kao presjek pravca PE i Ω. Sličnim koracima zaključujemo da je DAX_2E tetivan četverokut.

Presjek kružnica ω i Ω jest još samo jedna točka osim A, pa $X = X_1 = X_2$ čime je dokaz dovršen.

5. Neka je $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ skup koji zadovoljava uvjet.

Označimo sa

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_k, \ \forall k \in \{1, 2, ..., n+1\}$$

Primijetimo da svaki S_k daje različiti ostatak pri dijeljenju s $n + 1$ jer u suprotnom bi imali

$$S_p - S_q = a_p + a_{p-1} ... + a_{q+1} \equiv 0 \pmod{n+1}$$

što je suprotno početnoj pretpostavci zadatka.

Gledajmo sada izraz $a_1 + a_3$, on ima isti ostatak kao neki od S_k-ova.

Ako je $k > 3$ onda

$$S_k - a_1 - a_3 = a_k + a_{k-1} + ... + a_4 + a_2 \equiv 0 \pmod{n+1},$$

što nije moguće.

Ako je $k = 3$ onda je $S_3 - a_1 - a_3 = a_2 \equiv 0 \pmod{n+1}$, što je isto nemoguće.

Ako je $k = 1$ onda je $a_3 \equiv 0 \pmod{n+1}$, što je nemoguće.

Preostaje samo $k = 2$ što nam daje $a_2 \equiv a_3 \pmod{n+1}$.

Budući da smo nasumično odabrali redoslijed elemenata u A slijedi da svi elementi iz A daju isti ostatak pri dijeljenju sa $n + 1$. Neka je taj ostatak k, onda on $\forall x \in \{1, 2, ..., n\}$ ne smije zadovoljavati jednadžbu $x \cdot k \equiv 0 \pmod{n+1}$, što vrijedi ako i samo ako je k relativno prost s $n + 1$.

Dakle, svaki skup koji je rješenje je oblika $\{a_1(n+1)+k, a_2(n+1)+k, \ldots, a_n(n+1)+k\}$, gdje je k prirodan broj relativno prost s $n+1$, a a_i su neki različiti prirodni brojevi.