| L2 | Lakša grupa |
| --- | --- |

Predavanja subotom
sezona 2020./2021.

# Tetivni četverokuti

Lucija Relić

14.11.2020.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

## Uvod

Tetivni su četverokuti vrlo često koristan alat za rješavanje geometrijskih zadataka na natjecanjima i zato je dobro naučiti prepoznati ih u zadacima i znati primijeniti njihova svojstva. Prije nego što se upoznamo s njima prisjetimo se nekih pojmova i teorema.

**Teorem o obodnom i središnjem kutu.** Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.

Posljedice:

- Obodni kutevi nad istom tetivom su jednaki.
- **(Talesov teorem)** Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

**Teorem (o kutu između tangente i tetive)** Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Korisno je znati i sljedeće činjenice vezane uz karakteristične točke trokuta:

- Sve 3 simetrale stranica trokuta sijeku se u istoj točki (središte trokutu opisane kružnice $O$).
- Sve 3 simetrale unutarnjih kuteva trokuta sijeku se u istoj točki (središte trokutu upisane kružnice $I$).
- Visine u trokutu sijeku se u istoj točki (ortocentar trokuta $H$).
- Težišnica trokuta spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice. Težišnice trokuta sijeku se u istoj točki (težište trokuta $T$ ili $G$) koja dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ gledajući od vrha.

**Primjer 1.** Dokažimo Teorem o kutu između tangente i tetive.

*Rješenje.* Promatramo kružnicu $k$ i njenu tetivu $\overline{AB}$ te tangentu $t$ na kružnicu $k$ u točki $B$. Neka je $S$ središte kružnice $k$ i $C$ neka točka na kružnici različita od $A$ i $B$. Vidimo da točka $C$ određuje obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$.

Označimo $|\angle ACB| = \gamma$. Po teoremu o obodnom i središnjem kutu dobivamo da je $|\angle ASB| = 2\gamma$. Budući da je trokut $\triangle ABS$ jednakokračan, vrijedi $|\angle ABS| = 90° - \gamma$, a jer je kut između polumjera $\overline{SB}$ i tangente pravi dobivamo da je kut između tangente i tetive jednak $\gamma$. $\square$

Vrijeme je da napokon predstavimo i tetivne četverokute i njihova svojstva.

**Definicija.** Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica.

**Karakterizacije** *(tetivni četverokuti imaju ova svojstva, ali vrijedi i obrat, četverokut za koji vrijedi neko od navedenih svojstava je tetivan)*:

- zbroj nasuprotnih kuteva je 180°
- simetrale stranica četverokuta sijeku se u jednoj točki (ta točka je onda središte opisane kružnice)
- U četverokutu $ABCD$ vrijedi neka od ovih jednakosti kuteva (a ako vrijedi neka, vrijedi i svaka):
  - $|\angle ABD| = |\angle ACD|$
  - $|\angle ADB| = |\angle ACB|$

- $|\angle BAC| = |\angle BDC|$
- $|\angle CAD| = |\angle CBD|$

- **(Ptolomejev poučak)** U četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$.

Korisne tehnike pri rješavanju zadataka:

- *angle chase*, odrediti što više veličina kuteva
- docrtavanje pravaca, tako se mogu pronaći neki sukladni obodni kutevi što može pomoći prepoznati tetivni četverokut (također, docrtavanje dijagonala u tetivnom četverkutu generira puno sukladnih kuteva)
- zbog prve karaktertizacije tetivnih četverokuta znamo da je četverokut s nasuprotnim pravim kutevima tetivan
- kad god se pojave kružnice ima smisla potražiti tetivan četverokut

Prije nego što prijeđemo na zadatke riješimo još nekoliko primjera.

**Primjer 2.** Neka je $I$ središte upisane kružnice trokuta $ABC$ te neka su $D$ i $E$ nožišta okomica iz točke $I$ na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tim redom. Dokažite da je četverokut $IECD$ tetivan.

*Rješenje.* Stranice trokuta zapravo su tangente na upisanu kružnicu, pa su kutevi $|\angle IEC| = |\angle IDC| = 90°$. Sada vidimo da četverokut IECD ima nasuprotne kuteve prave pa po karakterizaciji tetivnih četverokuta zaključujemo da je četverokut $IECD$ tetivan. $\square$

**Primjer 3.** Osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

*Rješenje.* Neka je $H$ ortocentar trokuta $ABC$ i $T$ njegova osnosimetrična slika u odnosu na $AB$. Dovoljno je pokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan. Označimo sa $M$, $N$ i $P$ redom nožišta visina na $BC$, $AB$ i $AC$.

Neka je $|\angle ACB| = \gamma$. Budući da je $|\angle CPH| = |\angle CMH| = 90°$, četverokut $CPHM$ je tetivan. U tetivnom četverokutu zboj nasuprotnih kuteva je $180°$, pa je $|\angle PHM| = 180° - \gamma$, a zbog toga je i $|\angle AHB| = 180° - \gamma$ (vršni kutevi).

Točka $T$ je osnosimetrična slika od $H$ u odnosu na $AB$ pa vrijedi $\triangle ABH \cong \triangle ABT$. Zbog toga imamo

$$|\angle ATB| = |\angle AHB| = 180° - \gamma.$$

Sada smo dobili da je zbroj nasuprotnih kuteva u četverokutu $ATBC$ jednak $180°$ ($|\angle ACB| + |\angle AHB| = 180°$) pa je četverokut $ATBC$ tetivan. $\square$

## Lakši zadaci

1. Točke $A$, $B$, $C$, $D$ i $E$ leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $|\angle ABC| + |\angle CDE|$.

2. Jednakokračni trokut $ABC$, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu $k$ Neka je $D$ točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, $k_1$ kružnica opisana trokutu $ABD$, i $E$ točka na kružnici $k_1$. Pretpostavimo da pravac $AE$ siječe kružnicu $k$ u točkama $A$ i $F$ tako da $F$ leži između $A$ i $E$. Ako se pravci $DE$ i $BF$ sijeku u točki $G$, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.

3. Neka je $ABCD$ četverokut takav da je $|AB| = |BC| = |CA|$ i $\angle CDA = 120°$. Dokažite da je $|BD| = |AD| + |CD|$.

4. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine $BC$ siječe $AB$ u točki $E$. Kružnica koja prolazi točkom $E$, vrhom $C$ i polovištem $F$ stranice $\overline{BC}$ siječe $CD$ u točki $G$. Dokažite da su pravci $AD$ i $FG$ međusobno okomiti.

## Umjereni zadaci

5. Točke $E$ i $F$ su redom polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Pravci $BE$ i $CF$ sijeku se u točki $P$. Dokažite da je $|AP| = |AB|$.

6. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

7. U trokutu $ABC$ neka su nožišta visina iz $B$ i $C$ redom točke $D$ i $E$. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta $ABC$ u točki $A$ paralelna s pravcem $DE$.

8. Neka je $ABC$ jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{BC}$. Simetrala kuta u vrhu $B$ siječe krak $\overline{AC}$ u točki $P$. Ako kružnica koja prolazi točkama $B, C$ i $P$ raspolavlja krak $\overline{AB}$, odredite veličine kutova trokuta $ABC$.

9. Dan je šiljastokutan trokut $ABC$ U kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka $O$ je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\angle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki $D$. Pravac okomit na pravac $AD$ koji prolazi kroz točku $B$ siječe pravac $AO$ u točki $E$. Dokažite da točke $A, B, D$ i $E$ leže na istoj kružnici, tj. te točke su *konciklične*.

## Teži zadaci

10. Neka je $ABC$ šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki $P$, a pravac $AC$ u točki $Q$. Točka $R$ je nožište okomice iz točke $P$ na stranicu $\overline{AC}$, a točka $S$ je nožište okomice iz točke $Q$ na pravac $BC$. Dokažite da pravac $RS$ raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

11. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta $ABC$, a točka $O$ središte njemu opisane kružnice.Ako je $T$ nožište okomice iz točke $C$ na pravac $AO$, dokažite da pravac $TH$ prolazi polovištem dužine $BC$.

12. U trokutu $ABC$ vrijedi $|AB| < |BC| = |CA|$. Točka $M$ nalazi se na $\overline{AB}$ tako da je $|AM| = 2|BM|$. Neka je $F$ polovište $\overline{BC}$, te $H$ na $\overline{AF}$ tako da su $MH$ i $AF$ međusobno okomiti. Dokažite da je $\angle BHF = \angle ABC$.

## Hintovi

1. Iskoristite prvu karakterizaciju tetivnih četverokuta i Talesov teorem.
2. Tetivni četverokut ABCF, obodni kutevi.
3. Iskoristiti Ptolomejev poučak.
4. Angle chase, obodni kutevi.
5. *HINT 1:* Uočavate li neke sukladne trokute? Pokušajte primijeniti SKS poučak o sukladnosti.
   *HINT 2:* ABPF je tetivan.
6. Pokažite da sjecište simetrale stranice i opisane kružnice leži na simetrali nasuprotnog kuta. Koristiti obodne kuteve (obodni kutevi nad istom tetivom su jednaki).
7. Dovoljno je pokazati da je kut između tangente u $A$ i $AB$ jednak kutu $\angle AED$.
8. Obodni kutevi nad tetivama iste duljine su jednaki. Iskoristite obodne kuteve.
9. Ekvivalentno je dokazati $\angle EAD = \angle EBD$.
10. *HINT 1:* Neka je $M$ polovište od $\overline{AB}$. Treba pokazati da su točke $S$, $R$ i $M$ kolinearne. To ćemo pokazati ako pokažemo $\angle RSP = \angle MSP$.
    *HINT 2:* BQSM i PQSR su tetivni.
11. Pokažite da su $\triangle HPC$ i $\triangle PHB$ jednakokračni.
12. Spustite visinu na osnovicu i iskoristite svojstva težišta i srednjice.

## Rješenja

1. 2016., opć 2A, 4.

2. 2016., žup 3A, 3.

3. Uočimo da je trokut $ABC$ jednakostraničan, pa je $\angle ABC + \angle ADC = 60° + 120° = 180°$, tj. četverokut $ABCD$ je tetivan jer mu je zbroj nasuprotnih kuteva jednak $180°$. Koristeći Ptolomejev poučak na taj četverokut dobijemo $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$, pa zbog $|AB| = |BC| = |CA|$ vrijedi tvrdnja zadatka.

4. 2011., drž 1A, 4.

5. Pokazat ćemo da je četverokut $ABPF$ tetivan. Naime, po S-K-S poučku o sukladnosti je $\triangle BCE \cong \triangle CDF$, pa je $\angle ABP = 90° - \angle CBE = \angle BEC = \angle CFD = 180° - \angle AFP$, što povlači tetivnost. Nadalje, po S-K-S poučku o sukladnosti vrijedi i $\triangle BAF \cong \triangle CDF$, pa je $\angle CFD = \angle BFA$. Kako je četverokut $ABPF$ tetivan, slijedi $\angle BPA = \angle BFA$, pa kada spojimo sve što imamo vidimo da je $\angle BPA = \angle ABP$, zbog čega je $|AP| = |AB|$.

6. Neka je $O$ središte opisane kružnice, $P$ polovište stranice $\overline{AB}$ i $S$ sjecište simetrale stranice $\overline{AB}$ (to je pravac $OP$ budući da je središte opisane kružnice na simetrali stranice) sa opisanom kružnicom. Želimo pokazati $\angle ACS = \angle SCB$.
   Odmah vidimo da je četverokut $ASBC$ tetivan. Budući da su $\angle ACS$ i $\angle ABS$ kutevi nad (istom) tetivom $\overline{AS}$, vrijedi $\angle ACS = \angle ABS$. Simetrala stranice okomita je na tu stranicu, pa po $SKS$ poučku o sukladnosti trokuta znamo da su trokuti $\Delta ASP$ i $\Delta BSP$ sukladni ($\overline{SP}$ je zajednička stranica, $|AP| = |PB|$ po definiciji točke $P$ i kut između njih je pravi). Iz toga slijedi $\angle ABS = \angle BAS$.
   Sada opet primijenimo isti trik s obodnim kutevima, ovaj puta nad tetivom $\overline{BS}$, i dobivamo $\angle SCB = \angle SAB = \angle ABS = \angle ACS$, što je i trebalo pokazati.

7. Uočimo da je $\angle CDB = \angle CEB = 90°$, pa zaključujemo da je četverokut $BCDE$ tetivan. Tvrdnju zadatka pokazat ćemo ako pokažemo jednakost kuteva uz pravac koji bi bio transverzala. Pokažimo da je kut između tangente u $A$ i $AB$ jednak kutu $\angle AED$.
   Po teoremu o kutu između tetive i tangente je kut između tangente u točki $A$ i pravca $AB$ jednak $\angle ACB$, što je obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$. Usto, jer je $BCDE$ tetivan zaključujemo da je $\angle DCB = 180° - \angle BED = \angle AED$. Sada zbog $\angle ACB = \angle AED$ slijedi tvrdnja zadatka.

8. Označimo s $M$ polovište dužine $\overline{AB}$, te neka je $\angle ABC = \beta$. Četverokut $BCPM$ je tetivan, pa kako je pravac $BP$ simetrala kuta $\angle ABC$, vrijedi $\angle PBM = \angle PBC = \frac{\beta}{2}$, pa je $|PM| = |PC|$ jer su obodni kutevi nad tetivama iste duljine jednaki. Iz jednakosti obodnih kuteva imamo da je $\angle MPB = \angle MCB = \beta - \angle PCM = \beta - \angle PBM = \frac{\beta}{2}$. Dakle, i trokut $PMB$ je jednakokračan, tj. $|PM| = |BM|$.
   No, kako je $M$ polovište $\overline{AB}$ vrijedi $|BM| = |AM| = \frac{|AB|}{2}$, a kako je $|PC| = |MP| = |BM|$ i $|AB| = |AC|$, vrijedi $|AP| = |AM|$. Sada smo jasno dobili da je $\triangle AMP$ jednakostraničan, pa je $\angle BAC = 60°$. Stoga zaključujemo da su svi kutevi u $\triangle ABC$ jednaki $60°$.

9. 2017., žup 2A, 4.

10. 2018., žup 4A, 3.

11. 2009., drž 4A, 1.

12. Označimo $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Neka je $E$ nožište visine iz vrha $C$, i $G$ sjecište $CE$ i $FH$. Četverokut $EMGH$ je tetivan (kutevi $\angle GEM$ i $\angle GHM$ su pravi), i $G$ je težište trokuta $ABC$, pa je $|GE| = \frac{1}{3}$, odakle je $|EM| = |EB| - |MB| = \frac{|AB|}{2} - \frac{|AB|}{3} = \frac{|AB|}{6} = \frac{1}{3}|BE|$.
    Po poučku $SKS$, trokuti $EMG$ i $EBC$ su slični, pa je $\angle EMG = \angle EBC = \alpha$. $\overline{EF}$ je srednjica trokuta $ABC$, pa je i $\angle FEB = \alpha$. Sada je $\angle EHF = 180° - \angle EMG = 180° - \alpha$, pa je $EBFH$ tetivan. Na kraju iz obodnih kuteva dobivamo $\angle BHF = \angle BEF = \alpha = \angle ABC$.