

Uvod u potenciju točke

1. Dana je kružnica k i točka T koja nije na k . Kroz T su povučena dva pravca koja sijeku k u A i B , odnosno C i D . Dokaži da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.
2. (**Poučak o kutu između tetive i tangente**) Vrhom C trokuta ABC povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je T proizvoljna točka na toj tangenti tako da se A i T nalaze na različitim stranama pravca BC . Dokažite $\angle TCB = \angle CAB$ (drugim riječima, kut između tetive i tangente jednak je obodnom kutu nad tetivom).
3. Dana je kružnica k i točka T izvan k . Neka je A na k takva da je TA tangenta na k . Neka je p pravac kroz T koji siječe k u B i C . Dokaži da vrijedi $|TA|^2 = |TB| \cdot |TC|$.

Umnoški iz prvog i trećeg zadatka nazivaju se **potencija točke na kružnicu** (u ovom slučaju potencija točke T na kružnicu k ; ako je T unutar k , umnožak ćemo tretirati kao da je negativan). Ako u prvom i trećem zadatku uzmemo $\overline{AB}$ kao promjer od k , lako se vidi da dani umnoški iznose $|OT|^2 - r^2$, gdje je O središte kružnice k , a r njen polumjer. Pokažimo da vrijedi i obrat prvog zadatka, odnosno da jednaki umnoški daju tetivnost četverokuta.

4. (a) Dan je četverokut $ABCD$ i točka T na presjeku pravaca AB i CD tako da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$. Dokažite da je dani četverokut tetivan.
(b) Dan je četverokut $ABCD$ i točka T koja je sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ tako da vrijedi $|TA| \cdot |TC| = |TB| \cdot |TD|$. Dokažite da je dani četverokut tetivan.

Radikalna os

U nastavku ovog predavanja koristit ćemo pojam **geometrijsko mjesto točaka**. Pod pojmom geometrijskog mjesta točaka podrazumijevamo neki skup točaka (u ovom predavanju, u ravnini) koji zadovoljava neki zadani uvjet. Najčešće će geometrijsko mjesto točaka biti neki poznati geometrijski objekt (krivulja, geometrijski lik, ...). Na primjer, ako u ravnini zadamo neke dvije točke, A i B , geometrijsko mjesto svih točaka koje su jednako udaljene od točaka A i B jest pravac (simetrala dužine $\overline{AB}$), dok je geometrijsko mjesto svih točaka T takvih da je kut $\angle ATB$ pravi kružnica s promjerom $\overline{AB}$ (bez točaka A i B).

Pokazat ćemo da je geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na dvije dane kružnice pravac te ćemo taj pravac nazvati **radikalna os**.

5. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku u točkama A i B . Dokažite da je pravac AB geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice.
6. Dane su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u K i L te zajednička tangenta na te dvije točke koja ih dira u točkama A i B , redom. Neka je $M \in AB \cap KL$. Dokaži da je $|AM| = |BM|$.

Vidjeli smo da radikalna os postoji i da se lako konstruira za kružnice koje se sijeku, no što s onima koje se ne sijeku? Postoji li njihova radikalna os i kako ju naći i konstruirati? Pokušajmo odgovoriti na to pitanje sljedećim zadatkom.

7. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice. Dokažite da je geometrijsko mjesto točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice pravac okomit na spojnicu središta tih kružnica.

Lakši zadaci

8. Kružnice k_1 i k_2 , radijusa r_1 i r_2 , dodiruju se izvana u točki A . Na kružnici k_1 odabrana je točka B i $|AB| = a$. Neka je T diralište kružnice k_2 i tangente na tu kružnicu povučene iz točke B . Izrazite $|BT|$ pomoću r_1 , r_2 i a .
9. Dana je kružnica s promjerom $\overline{AB}$ i proizvoljne točke D i C na luku $\widehat{AB}$. Neka je $E \in AD \cap BC$. Dokažite da vrijednost izraza $|AE| \cdot |AD| + |BE| \cdot |BC|$ ne ovisi o izboru točaka C i D .
10. Dane su tri kružnice k_1 , k_2 i k_3 te pravci s_1 , s_2 i s_3 koji su redom radikalne osi parova kružnica (k_1, k_2) , (k_2, k_3) i (k_1, k_3) . Dokažite da su s_1 , s_2 i s_3 paralelni pravci ako su središta danih kružnica kolinearne, a u suprotnom prolaze istom točkom. Tu točku zovemo **radikalno središte**.
11. Dvije kružnice, k_1 i k_2 , sijeku se u točkama S i T . Neka je P točka na pravcu ST . Na k_1 odabrane su točke A i B , a na k_2 odabrane su C i D takve da su A , B i P te C , D i P kolinearne. Dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivan.
12. Dan je trokut ABC i točka T na pravcu AB takva da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$. Dokažite da je pravac TC tangenta na kružnicu opisanu trokutima ABC .
13. Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle ABC > 90^\circ$, odnosno $|AC| > |BD|$. Opisana kružnica trokuta BCD siječe dijagonalu $\overline{AC}$ po drugi put u točki M . Dokažite da je pravac BD zajednička tangenta na kružnice opisane trokutima ABM i ADM .
14. Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su točke D , E i F takve da je četverokut $BCEF$ tetivan. Neka je T drugo sjecište kružnica opisanih trokutima BDF i CDE . Dokažite da su točke A , D i T kolinearne.
15. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su redom točke E i F takve da su pravci EF i BC paralelni. Dokažite da se kružnice kojima su $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ promjeri sijeku na pravcu koji prolazi vrhom A , a okomit je na stranicu $\overline{BC}$ trokuta.
16. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se ne sijeku. Dokažite da je geometrijsko mjesto središta kružnica koje su ortogonalne na njih njihova radikalna os.
- Napomena.** Dvije kružnice su ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.

Teži zadaci

17. Neka su A, B, C, D kolinearne točke tim redoslijedom. Kružnice promjera $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točkama X i Y . Neka je P točka na pravcu XY koja se ne nalazi na pravcu AB te neka su M i N drugi presjeci pravaca CP i BP s kružnicama nad $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, tim redom. Dokažite da se pravci AM , DN i XY sijeku u jednoj točki.
18. Neka je ABC šiljastokutan trokut s ortocentrom H i D točka na stranici $\overline{BC}$. Neka su E i F redom nožišta visina iz vrhova B i C . Neka je k_1 kružnica opisana trokutima BDF i točka X takva da je $\overline{DX}$ promjer kružnice k_1 . Analogno su definirane kružnice k_2 i Y . Dokažite da su točke X , Y i H kolinearne.

Većina zadataka preuzeta je sa sljedećeg predavanja gdje možete naći i njihova rješenja:

https://mnm.hr/wp-content/uploads/2016/03/potencija_tocke.pdf