

T1	Teža grupa
----	---------------

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2020./2021.

 mnm.hr

Uvodno predavanje

Luka Milačić
31. listopada 2020.

 Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"



Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

 matematicari.mnm

Uvod

U ovom predavanju ćemo riješiti hrpu zadatak iz svakog područja da se zagrijemo za nadolazeću godinu natjecanja.

Samo za napomenu A -algebra, N -teorija brojeva, G -geometrija, C -kombinatorika.

Zadaci iz svake kategorije su sortirani po težini.

A1. Ako za $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Odredi maksimum izraza

$$ab + bc + ca.$$

A2. Riješite sustav jednačbi u $\mathbb{R}$ az x, y, z :

$$(x + y)^3 = z$$

$$(y + z)^3 = x$$

$$(x + z)^3 = y$$

A3. Dani su $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ vrijedi $a + b + c = 3$. Odredi minimum izraza

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}.$$

A4. Dokaži nejednakost za $a, b, c \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} + \frac{9(a + b + c)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 33$$

A5. Dokaži nejednakost za sve $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} + \frac{2|ad - bc|}{\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}} \geq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

N1. Dokaži da za sve proste brojeve $p > 3$ broj $p^2 + 11$ ima barem 6 različitih dijelitelja.

N2. Odredi sve cijele brojeve m i n za koje vrijedi $m^3 + n^3 = (m + n)^2$.

N3. Odredi sve parove prirodnih brojeva x, y t.d.:

$$xy^2 + y + 7|x^2y + x + y$$

N4. Dan je skup S i prosti broj p , $x \in S$ ako vrijedi $(p - x^2)|x^2$ i $x^2 < p$. Dokaži da postoje $a, b \in S$ t.d. $a|b$.

- N5.** Dan je niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ takvih da su svi manji od 1000 i svaki par a_i i a_j ($i \neq j$) ima najveći zajednički višekratnik veći od 1000. Dokaži:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$$

- G1.** Dan je $\triangle ABC$ sa opisanom kružnicom k . Dokaži da se unutrašnja i vanjska simetrala kuta iz vrha A zajedno s simetralom stranice BC sijeku na k .
- G2.** Neka je dan $\triangle ABC$ i neka je točka P na kružnici opisanoj tom trokutu. Dokaži da nožišta visina iz P na stranice ABC leže na istom pravcu.
- G3.** Dan je konveksan četverokut $ABCD$ tako da vrijedi $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle CDB$ i $|AB| = |CB|$. Dokaži da je $|AD| = |CD|$.
- G4.** Dan je raznostraničan $\triangle ABC$ sa središtem opisane O . Unutarnja simetrala kuta $\angle BAC$ siječe BC u D . Neka je E preslika D preko polovišta BC . Pravci kroz D i E okomite na BC sijeku AO u X i Y redom. Dokaži da je $BXCY$ tetivan četverokut.
- G5.** Dan je $\triangle ABC$ sa opisanom kružnicom Ω i središtem upisane kružnice I . Neka pravac koji prolazi kroz I okomit na CI siječe BC i manji luk BC u točkama U i V redom. Neka pravac koji prolazi kroz U i paralelan je s AI siječe AV u X i neka pravac kroz V paralelan sa AI siječe AB u Y . Neka su W i Z polovišta AX i BC redom. Dokaži da ako su I, X i Y kolinearne, onda su i I, W i Z kolinearne.
- C1.** Neka u zatvoru ima 100 ćelija sa brojevima od 1 do 100 na sebi. Svaki put kada se klikne crveni gumb neke ćelije se otvore. Ako je gumb pritisnut k puta otvoriti će se sve ćelije koje su višekratnici broja k . Koliko ćelija je otvoreno nakon što je gumb pritisnut 100 puta.
- C2.** Dokažite da svaki poliedar ima barem 2 stranice s jednakim brojem vrhova.
- C3.** Nad zadanim mnogokutom u ravnini dopuštena je sljedeća operacija: odrežemo dio mnogokuta, zrcalimo ga te ga slijepimo nazad po istoj stranici po kojoj smo ga odrezali. Možemo li, počevši od jednakostraničnog trokuta, doći do kvadrata?
- C4.** Dan i Mrav igraju igru. Na velikom stolu svaki od njih stavlja redom po jedan novčić. Novčići su svi iste veličine. Gubitnik igre je onaj koji nemože više staviti novčić na stol. Ako Dan prvi igra tko dobiva.
- C5.** Promotrimo konveksan mnogokut s n vrhova, $n > 4$. Na proizvoljan način dijelimo mnogokut na trokut čiji vrhovi su vrhovi mnogokuta tako da nikoja dva trokuta nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka. Trokute kojima su dvije stranice ujedno i stranice mnogokuta bojimo u crno, one kojima je jedna stranica ujedno i stranica mnogokuta u crveno, a one kojima nijedna stranica nije stranica mnogokuta u bijelo. Dokaži da je crnih trokuta za dva više nego bijelih.

Rješenja

A1. Primjetimo da je

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ac \\&\iff \\2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ac \\&\iff \\(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Što vrijedi jer je bilokoji kvadrat veći od 0. Dakle maksimalna vrijedost je 1 i postiže se za $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

A2. Riješenje Zadatak 6.

A3. Riješenje Kanadsko državno 2002.

A4. Riješenje Iz "inequalities from the word 1995-2005" Zadatak 145.

A5. Riješenje Iz "inequalities from the word 1995-2005" Zadatak 41.

N1. Primjetimo da je p nepravna i veći od 3 pa nije djeljiv s 3. Opće je poznato da kvadrati pri dijeljenju s 3 i 4 daju ostatak 1. Dakle $11 + 1 = 12$, a 12 je djeljivo s 3 i s 4 dakle 3i 4 dijeli $p^2 + 11$, pa su njegovi djelitelji 1, 2, 3, 4, 6 i $p^2 + 11$ jer je on veći od svih ostalih. Dakle našli smo ih 6 različitih.

N2. Trivijalno riješenje je $m = -n$, pretpostavimo $m \neq -n$, sada faktorizirajmo i dobivamo

$$m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2) = (m+n)^2 \iff m^2 - mn + n^2 = m+n.$$

Sada primjetimo da je $m^2 \geq m$ dakle $m^2 - mn + n^2 = m+n \geq m+n - mn \iff mn \geq 0$.

Dakle $m, n \leq 0$ ili $m, n \geq 0$.

Ako $m, n \leq 0$ onda $m+n = m^2 - mn + n^2 \leq 0$, no $m^2 - mn + n^2 \geq mn \geq 0$, pa je tu jedino riješenje $m = n = 0$.

Ako $m, n \geq 0$, pretpostavimo $m \geq n$, tada imamo $0 \leq (m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2 = n + m - mn$

Sada $m+n \geq mn$, no lako se vidi da ovo ne vrijedi ako je $m > 2$, dakle jedina riješenja su $(m, n) = (k, -k), (m, n) = (2, 1)$ i $(m, n) = (1, 2)$.

N3. Riješenje IMO 1998 P4.

N4. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da $k^2 < p < (k+1)^2$, dakle $p - k^2$ je najmanji element u S .

Ako $p - k^2 = 1$, budući da je $p > 5$, to mora biti nepran prost broj, dakle k je paran. Tada neka je $a = p - (k-1)^2 = 2k$ i $b = p - 1^2 = k^2$. Zbog toga što je k paran slijedi $2k|k^2$ odnosno $a|b$.

Ako pak $p - k^2 \neq 1$, neka je $a = p - k^2$. Budući da je $k^2 \equiv p \pmod{a}$, također imamo $(k-a)^2 \equiv p \pmod{a}$. Slijedi

$$a|p - (k-a)^2 \text{ i } a|p - (a-k)^2$$

Još je ostalo pokazati da je ili $p - (k-a)^2 \in S$ ili $p - (a-k)^2 \in S$.

Ako je $k > a$, znamo da je $k-a$ prirodan i također $k^2 < p$ dakle $(k-a)^2 < k^2 < p$ dakle $b = p - (k-a)^2 \in S$.

Ako je $a = k$ onda je $k = p - k^2 \iff p = k(k+1)$ što je nemoguće.

Ako je pak $a < k$ onda je $a-k$ prirodan, također znamo $a = p - k^2 < (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \rightarrow a \leq 2k$

Ako je $a = 2k$ onda je $2k = p - k^2 \iff p = k(k+2)$ što je nemoguće

Dakle $a < 2k$, no onda je $a-k < k \rightarrow (a-k)^2 < k^2 < p$ što znači da je $b = p - (a-k)^2 \in S$ čime je zadatak završen.

N5. Riješenje Ruska matematička olimpijada 1951.

- G1. Riješenje** Za vanjsku simetralu samo iskoristimo činjenicu da se unutrašnja i vanjska simetrala sijeku pod kutom od 90° .
- G2. Riješenje** Simsonov pravac.
- G3. Riješenje** Kanadsko državno 2000. P4
- G4. Riješenje** IMO shortlist 2012. G4
- G5. Riješenje** IMO Shortlist 2014. G7
- C1.** Primjetimo da su to vrata s nepranim brojem dijelitelja, lako je vidjeti da su to kvadrati prirodnih brojeva, dakle riješenje je broj kvadrata od 1 do 100.
- C2. Riješenje** 9. zadatak.
- C3.** Primjetimo da ovim postupkom površina i opseg novonastalog lika ostaje ne promjenjena. Laganom provjerom dolazimo do zaključka je da je iz jednakokračnog trokuta nemoguće doći do kvadrata.
- C4.** Prvi igrač stavlja novčić na sredinu stola, tada on može s obzirom na taj novčić uvijek zrcaliti poteze drugog igrača s obzirom na srednji novčić. Drugim riječima prvi igrač uvijek može napraviti potez što znači da drugi igrač uvijek gubi.
- C5. Riješenje** JMBO 2004. P4