

Princip ekstrema

T4	Teža grupa
----	---------------

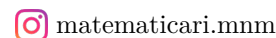
Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2020./2021.

Luka Milačić

21. studenog 2020.



Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"



Uvod

U ovom predavanju koristi ćemo mnoge pretpostavke u slučajevima gdje imamo konačno mnogo elementana. Na primjer u razredu ima 20 ljudi sigurno postoji netko u razredu tko je najviši i netko tko je najniži. Koristeći te informacije pokušati ćemo riješiti mnogo zadataka.

Lakši zadaci

1. Na zabavi se nalazi 10000 ljudi. U nekom trenutku neke su se osobe počele rukovati. Dokažite da postoje 2 osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.
2. Od n točaka u ravnini nikoje 3 ne čine trokut površine veće od 1. Dokažite da se sve te točke mogu prekriti trokutom površine ne veće od 4.
3. 20 realnih brojeva poredano je u krug, na način da se između svaka 2 broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažite da su svi brojevi u krugu jednaki.
4. Odredite sve trojke realnih brojeva (x, y, z) za koje vrijedi:

$$(x^2 + 1)y = z^2 + 1$$

$$(y^2 + 1)z = x^2 + 1$$

$$(z^2 + 1)x = y^2 + 1$$

5. Dokaži da je svaki konveksni mnogokut površine 1 je sadržan u pravokutniku površine 2.
6. Dokaži da u svakom konveksnom mnogokutu postoje tri uzastopna vrha A, B i C takva da kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$ pokriva cijeli mnogokut.
7. U svakom mnogokutu postoje vrh i stranica koja ga ne sadrži takvi da je ortogonalna projekcija vrha na stranicu sadržana unutar stranice.

Teži zadaci

1. U tablici $n \times n$ napisani su brojevi od 1 do n^2 . Dokažite da postoje 2 susjedna polja koja se razlikuju za barem $n + 1$. Susjednim poljima podrazumijevamo ona koja dijele barem 1 vrh.
2. Neka je n prirodan broj. Skup S_n je skup svih cijelobrojnih točaka (x, y) , za koje vrijedi $|x| + |y + \frac{1}{2}| \leq n$. Neka je put definiran kao lanac točaka $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$. Za svaki par (x_i, y_i) i $(x_i + 1, y_i + 1)$ vrijedi da je udaljenost između njih 1 tj. susjedi su. Dokaži da se S_n nemože podijeliti na manje od n puteva. (Putevi se nemogu preklapati i moraju pokrivati cijeli S_n).
3. Neka je $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $n > 2$. Neka je $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ kolekcija podskupova od N . Za $\mathcal{F}$ kažemo da je odvajajuća ako za svaki par $\{x, y\}$ prirodnih brojeva iz N postoji A_i t.d. $A_i \cap \{x, y\}$ skup sa točno jednim elementom. Za $\mathcal{F}$ kažemo da je pokrivač ako za svaki element iz N postoji neki A_i koji ga sadrži. Odredi najmanji t tako da je za $\mathcal{F}$ istovremenu odvajajuć i pokrivač.
4. Dijagonala pravilnog 2020-erokuta je neparna ako ga dijeli na 2 k -terokuta sa neparnim brojem bridova (ne uključujući dijagonalu). Stranice 2020-erokuta se isto podrazumjevaju kao neparne dijagonale. Neka je taj 2020-erokut podijeljen na 2020 trokuta pomoću 2017 dijagonala. Definirajmo dobar trokut kao jednakokrani trokut sa 2 neparne stranice. Odredi najveći mogući broj dobrih trokuta.

Rješenja Lakši zadaci

1. **Riješenje** 1. zadatak.
2. **Riješenje** 11. zadatak.
3. **Riješenje** 4. zadatak.
4. Županisko natjecanja 2019. 4. razred 4, zadatak.
5. Uzmimo najveću udaljenost neke 2 točke mnogokuta. Potom označimo s v_1 najveću udaljenost točke iznad odnosno s v_2 najveću udaljenost točke ispod najduže udaljenosti. Označimo tu dužinu sa a . Kako je mnogokut konveksan i ima površinu manju od 1 vrijedi $a(v_1 + v_2)/2 < 1$ odnosno $(v_1 + v_2) < 2/a$. Ako uzmemo pravokutnik sa stranicama a i $2/a$ možemo prekriti sve točke mnogokuta. Tom pravokutniku su stranice okomite odnosno paralelne na najdužu dužinu.
6. Lagano je vidjeti da sigurno postoje dužina i neki vrh mnogokuta tako da kružnica opisana tim vrhovima pokriva cijeli mnogokut. (Uzmimo neku dužinu AB i točku C , ako točka X nije u kružnici od ABC onda je u kružnici ABX jer je kružnica ABC sadržana u njoj osim luka AB , a on nije bitan jer između njega nema točaka). Definirajmo udaljenost dvije točke kao broj najmanji broj točaka u mnogokutu koji je između njih. Uzmimo sada takav trokut i neka je AB dužina mnogokuta a točka C neki vrh mnogokuta. Uzmimo bez smanjenja općenitosti sada luk BC kao najmanja udaljenost C od B . Uzmimo sada bilo koju točku iz tog skupa i nazovimo je X . Opisana kružnica trokut BCX sigurno pokriva sve točke koje nisu u skupu udaljenosti B od C . Kružnica BCX pokriva cijeli veći luk BC pa tako i sve točke koje su u njemu. Također sada za stranicu BC možemo naći točku unutar mnogokuta koji sadrži elemente iz udaljenosti B do C takvu da ona pokriva cijeli taj mnogokut, neka je ta točka Y . Sada smo našli trokut koji pokriva cijeli mnogokut u manjem mnogokutu od početnoga. Ako nastavimo ovim postupkom doći ćemo do nekog trokuta koji je dio početnog mnogokuta čime smo gotovi.
7. Predpostavimo da ne postoji takva točka. Uzmimo najdužu stranicu mnogokuta. Neka su njene točke A i B . Kroz A i B povučemo pravce okomite na AB . Niti jedna točka mnogokuta nije između ta 2 pravca jer bi inače projekcija točke bila unutar te stranice. No ako mnogokut ima još vrh C koji je bez smanjenja općenitosti bliži A nego B onda je $BC > AB$ no to je kontradikcija. Dakle postoji takva točka.

Teži zadaci

1. **Riješenje** 15. zadatak.
2. **Riješenje** USAMO 2008. P3
3. **Riješenje** IMO shortlist 1988.
4. **Riješenje** IMO 2006. P2