

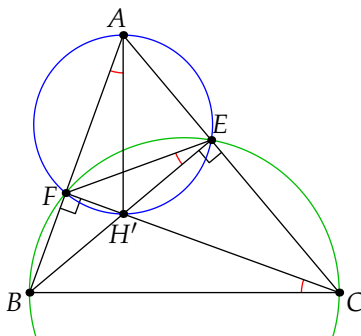
1 Uvod

Geometrija je posebno područje po tome što se često znaju "ponavljati konfiguracije". Da budem malo specifičniji, to znači da poznavanje činjenica, o na primjer, trokutu i ortocentru, može pomoći u širokom spektru zadataka, to jest, nerijetko je najveća težina zadatka prepoznati konfiguraciju. Upravo zbog toga važno je imati u svijesti neke najosnovnije konfiguracije i stvari koje u njima vrijede prilikom rješavanja zadataka.

2 Ortocentar

Prije svega, pokažimo da ortocentar uistinu postoji, to jest, da se sve tri visine u trokutu sijeku u jednoj točki. Visine trokuta $\triangle ABC$ sijeku se u jednoj točki koju nazivamo ortocentar trokuta $\triangle ABC$ (skoro pa uvijek označavamo s H).

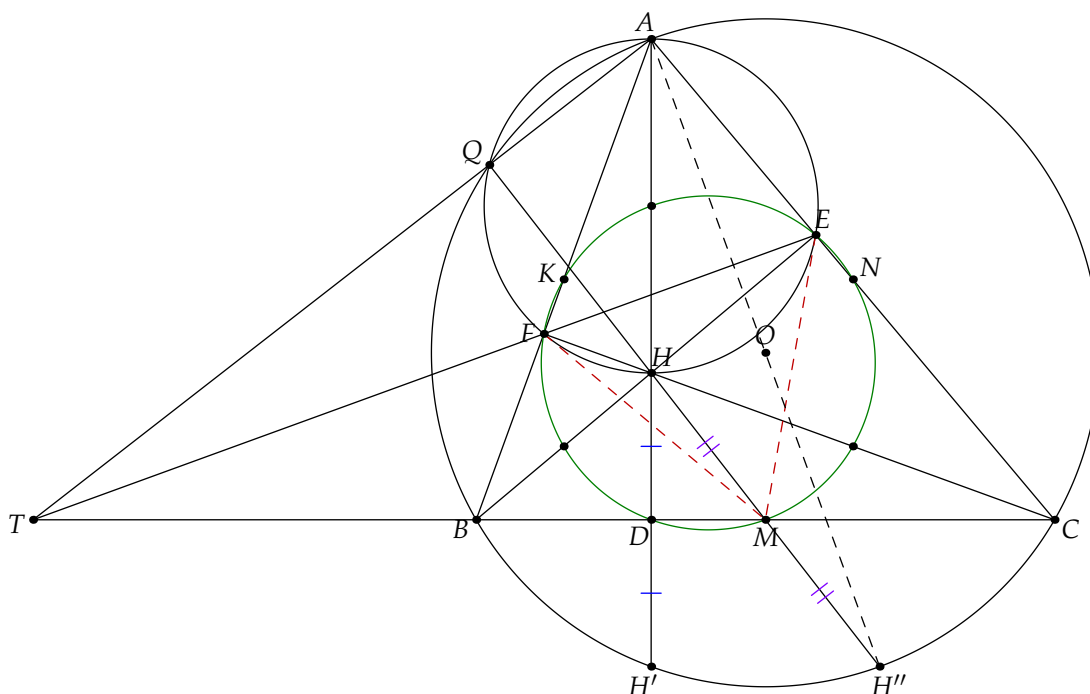
Promotrimo sljedeću skicu.



Neka su E i F nožišta visina iz B i C na $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Neka je H' presjek pravaca BE i CF . Htjeli bi pokazati da je i pravac AH' također visina trokuta, odnosno, da je okomit na pravac BC . Znamo da su četverokuti $(BFEC)$ i $(AEFH')$ tetivni (zašto?) pa imamo da je $\angle AFH' = \angle FEH' = \angle FEB = \angle FCB$ iz čega slijedi zaključak (zašto?).

Kao što vidimo, ortocentar uistinu postoji za svaki¹ trokut $\triangle ABC$ pa ima smisla o njemu i pričati. Vrijedi sljedeće:

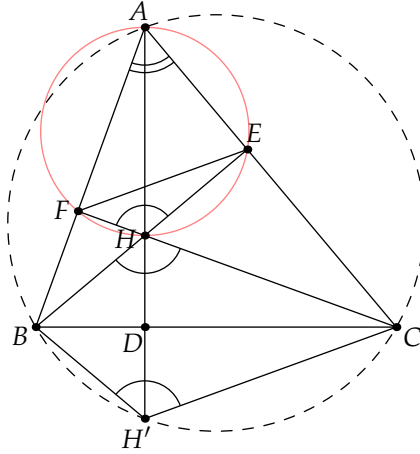
¹eventualno bi kao sitnu digresiju trebalo argumentirati što se događa s tupokutnim trokutima, no, jasno, to je jednostavno te nema potrebe ovdje navoditi



1. Preslika od H preko D leži na (ABC) .
2. Preslika od H preko M leži na (ABC) . Ta točka je dijametralno suprotna točki A s obzirom na kružnicu (ABC) .
3. Pravci ME i MF su tangente na kružnicu (AEF) .
4. Nožišta visina, polovišta stranica i polovišta spojnice vrhova trokuta leže na jednoj kružnici. Tu kružnicu nazivamo Eulerovom kružnicom, Feuerbachovom kružnicom ili kružnicom devet točaka.
5. Ako je Q "gornji" presjek pravca HM s kružnicom opisanom trokutu $\triangle ABC$, dokaži da su pravci BC , EF i AQ kopunktalni.

2.1 Dokazi tvrdnji

1. Slijedimo skicu.

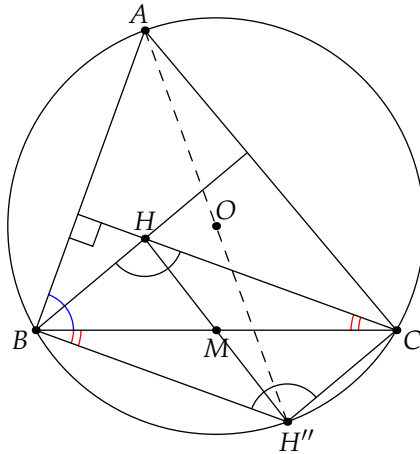


Neka je H' preslika točke H preko $\overline{BC}$. Tvrdimo da je četverokut $ABH'C$ tetivan. Dokazati ćemo da je $\angle BH'C + \angle BAC = 180^\circ$. Naime, vrijedi

$$\angle BH'C = \angle BHC = \angle EHF = 180 - \angle FAE \implies \angle BH'C + \angle BAC = 180^\circ$$

pri čemu prva jednakost vrijedi zbog toga što je H' preslika od H , a druga jer je četverokut $(AFHE)$ tetivan. Kako je suma nasuprotnih kuteva u četverokutu $ABH'C$ jednaka 180° , znamo da je taj četverokut tetivan.

2. Slijedimo skicu.

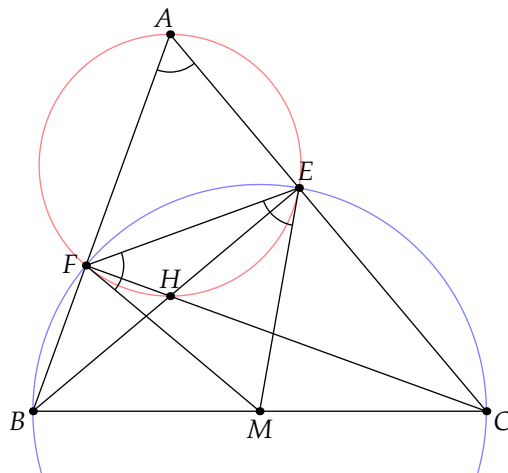


Neka je H'' preslika točke H preko točke M . Jasno, želimo pokazati da je četverokut $ABH''C$ tetivan i da je AH'' promjer. Naime, uočimo da je $BHCH''$ paralelogram zbog toga što se dijagonale raspolavljaju pa je $\angle BH''C = \angle BHC$. Koristeći iste argumente kao i u prethodnom dokazu, imamo da je traženi četverokut tetivan. Naposljetku, uočimo da je

$$\angle ABH'' = \angle ABC + \angle CBH'' = \angle ABC + \angle HCB = 90^\circ$$

pa je ovo uistinu promjer.

3. Slijedimo skicu.



Prema obratu poučka o kutu između tetive i tangente, dovoljno je pokazati $\angle FAE = \angle MEF$. Označimo kut $\angle BAC$ s α . Prisjetimo se činjenice da je četverokut $(BFEC)$ tetivan i da je središte te kružnice u M , polovištu stranice $\overline{BC}$. Zbog toga znamo da je

$$MB = MF = ME = MC.$$

Također, koristeći teorem o obodnom i središnjem kutu, znamo da je $m\angle FME = 2\angle FCE = 180^\circ - 2\alpha$. Kako je trokut $\triangle MFE$ jednakokrakan, imamo da je

$$\angle MFE = \angle MEF = \frac{180^\circ - \angle FME}{2} = \alpha$$

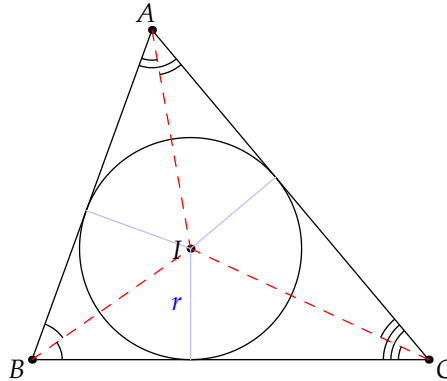
što smo trebali i dokazati.

4. Označimo s S polovište dužine AH . Iz prethodnog zadatka, znamo da je $\angle SFM = \angle SEM = 90^\circ$ pa je četverokut $SFME$ tetivan. Također, jednostavnim angle chasingom² možemo dobiti da je kut $\angle FDE$ jednak $180^\circ - 2\alpha$, odnosno, da je $\angle FDE = \angle FME$ pa je i četverokut $(FDME)$ tetivan. Potpuno analogne zaključke mogli bi izvoditi i ako promatramo s obzirom na druge vrhove trokuta $\triangle ABC$ pa znamo da su točke D, E, F, M, N, K na jednoj kružnici, a prema prvoj tvrdnji ovog dokaza, imamo i da polovišta spojnica s ortocentrom leže na toj kružnici.
5. Znamo da je točka Q na pravcu HM pa je Q točka nad promjerom AH'' kružnice (ABC) . Zbog toga je kut $\angle AQH''$ pravi, pa time i kut $\angle AQH$ zbog čega točka Q leži na kružnici s promjerom AH što je upravo kružnica (AEF) . Promotrimo kružnice (ABC) , $(AQEF)$ i $(BFEC)$. Njihove radikalne osi su pravci AQ , EF i BC , dakle, oni se sijeku u radikalnom središtu, to jest, sijeku se u jednoj točki.

²ako ne vidite kako bi to izveli, slobodno pitajte

3 Centar Upisane kružnice

Kako što naslov kaže, u interesu nam je točka koja je središte upisane kružnice. No ta točka koju ćemo označiti sa I (*eng. incenter*) ima drugu karakterizaciju, preko koje ćemo pokazati da to središte postoji za svaki trokut ABC . Naime središte upisane kružnice je zapravo sjecište simetrala svih kuteva trokuta. Dokažimo to! Neka je I presjek simetrala kuteva $\angle B$ i $\angle C$, dokazat ćemo da je pravac AI simetrala kuta $\angle A$.



Jedno bitno obilježje koje ćemo koristiti je:

Točka je na simetrali kuta XYZ ako i samo ako je jednako udaljena od pravaca XY i YZ

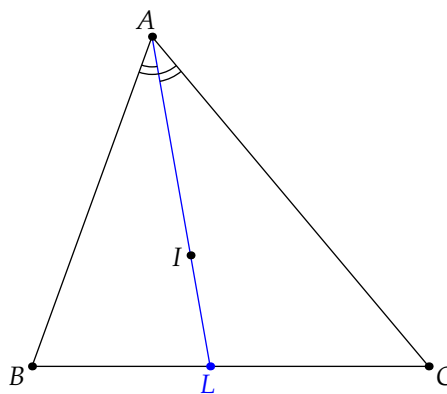
Kako se I nalazi na simetrali kuta $\angle B = \angle ABC$ znamo da je I jednako udaljena od AB i od BC , neka je to neka udaljenost r , kako je I isto tako na simetrali kuta $\angle C = \angle BCA$ točka I je jednako udaljena od BC i CA za istu udaljenost r . Time je

$$d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA) = r$$

time I leži na simetrali trećeg kuta $\angle A$.

Uočimo da smo u ovom dokazu ustanovili da je točka na sjecištu simetrala kuteva jednako udaljena od svih stranica, ta udaljenost je upravo radijus upisane kružnice a I je njeno središte.

Vrijedi spomenuti i poznati poučak o simetrali, koji je relevantan za centar upisane upravo zbog definicije centra upisane kao presjek svih simetrala.



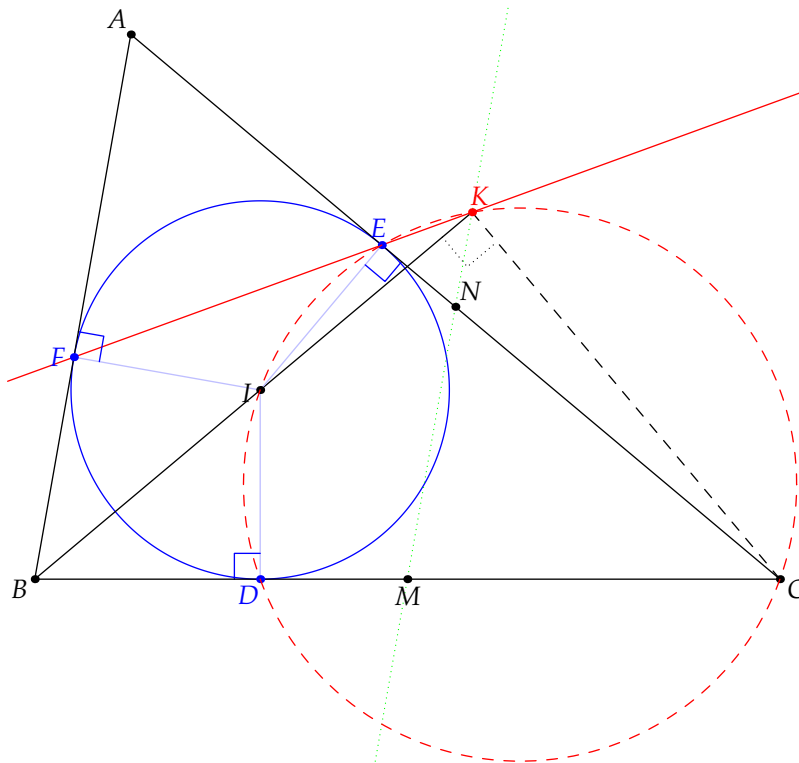
Poučak o simetrali Neka je L sjecište simetrale kuta $\angle A$ sa BC tada je

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

Upoznajmo se nadalje sa konfiguracijama u kojima je upisana kružnica u kombinaciji sa ostalim elementima trokuta

4 Upisana kružnica i polovišta

Dan nam je $\triangle ABC$ sa upisanom kružnicom ω i središtem upisane I , upisana kružnica dira stranice BC, CA i AB redom u D, E i F . Neka su M i N polovišta stranica BC i CA redom. Neka je K presjek pravaca EF i BI .



1. Dokaži da je $CK \perp AI$
2. Dokaži da su M, N i K kolinearne točke
3. Dokaži da je $NK = \frac{BC-AB}{2}$

4.1 Dokazi tvrdnji

1. Uočimo da je za dokazat okomitost pravaca CK i AI dovoljno dokazati tetivnost četverokuta $IEKC$. Kako je IE trivijalno okomito na AC , iz tetivnosti četverokuta $IEKC$ bi imali $\angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$ odakle slijedi tvrdnja.

Kako je CI simetrala kuta $\angle BCA$ i ammo da je je

$$\angle ICE = \angle ICA = \frac{\gamma}{2}$$

. Ganjamo kut $\angle IKE$, on se nalazi u sklopu većeg trokuta $\triangle BFK$, te je stoga

$$\angle IKE = \angle BKF = 180^\circ - \angle KFB - \angle KBF = \angle EFA - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

Dakle $\angle IKE = \angle ICE = \frac{\gamma}{2}$ odakle slijedi tetivnost četverokuta $IEKC$ i zaključak

$$\angle BKC = \angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$$

2. Kako je $MN \parallel AB$ dovoljno je dokazati $MK \parallel AB$, prema prethodnoj tvrdnji i Talesovom teoremu činjenica da je $\angle BKC = 90^\circ$ znači da se nalazi na kružnici promjera BC sa središtem u M . Tada imamo $\angle MKB = \angle MBK$ jer je M središte kružnice, i $\angle MBK = \angle KBA$ jer je BK simetrala kuta $\angle B$. Stoga je

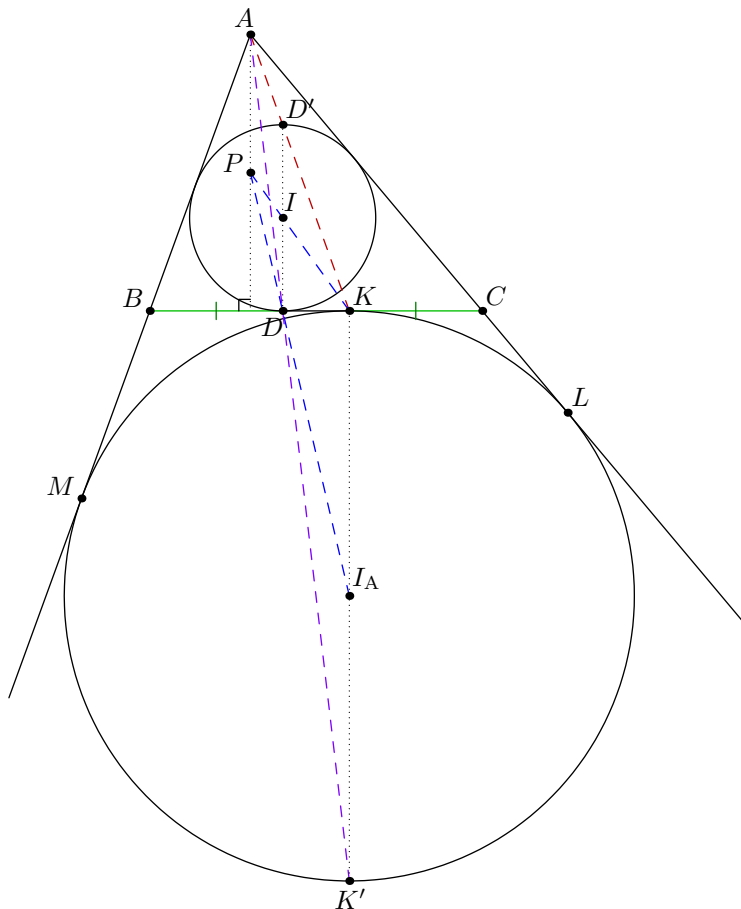
$$\angle MKB = \angle MBK = \angle KBA$$

odakle slijedi paralelnost $MK \parallel AB$.

3. $NK = MK - MN = MB - \frac{AB}{2} = \frac{BC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{BC-AB}{2}$

5 Pripisana kružnica

Na sljedećoj skici D je diralište upisane sa stranicom $\overline{BC}$, K , L i M su dirališta pripisane sa stranicama trokuta, I i I_A su središta upisane i pripisane kružnice redom, a točka P je polovište visine iz A . Vrijedi sljedeće:



1. Dokaži da je $BD = CK$.
2. Dokaži da su točke A, D' i K kolinearne.
3. Dokaži da su točke A, D i K' kolinearne.
4. Dokaži da su točke P, I, K i P, D, I_A kolinearne.

5.1 Dokazi tvrdnji

1. Budući da su AL i AM tangente na istu kružnicu iz iste točke znamo da su jednake, promatrajući tangente iz B i C na pripisanu kružnicu dobijamo niz jednakosti

$$AL = AM$$

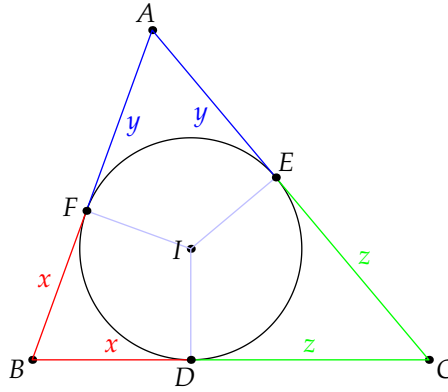
$$BM = BK$$

$$CL = CK$$

Označimo li sa $s = \frac{AB+BC+CA}{2}$ poluopseg $\triangle ABC$ dobijamo

$$AL = \frac{AL}{2} + \frac{AM}{2} = \frac{AB+BK}{2} + \frac{KC+CA}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{BK+KC}{2} + \frac{CA}{2} = s$$

Time zapravo imamo da je $CL = AL - AC = s - AC$



Sa skice je očigledno da je $x + y + z = s$ odnosno kako je $y + z = AC$ i $x = BD$ imamo sljedeće $BD = s - AC$. No to je upravo izraz koji smo dobili za CK . Dakle

$$BD = s - AC = CK$$

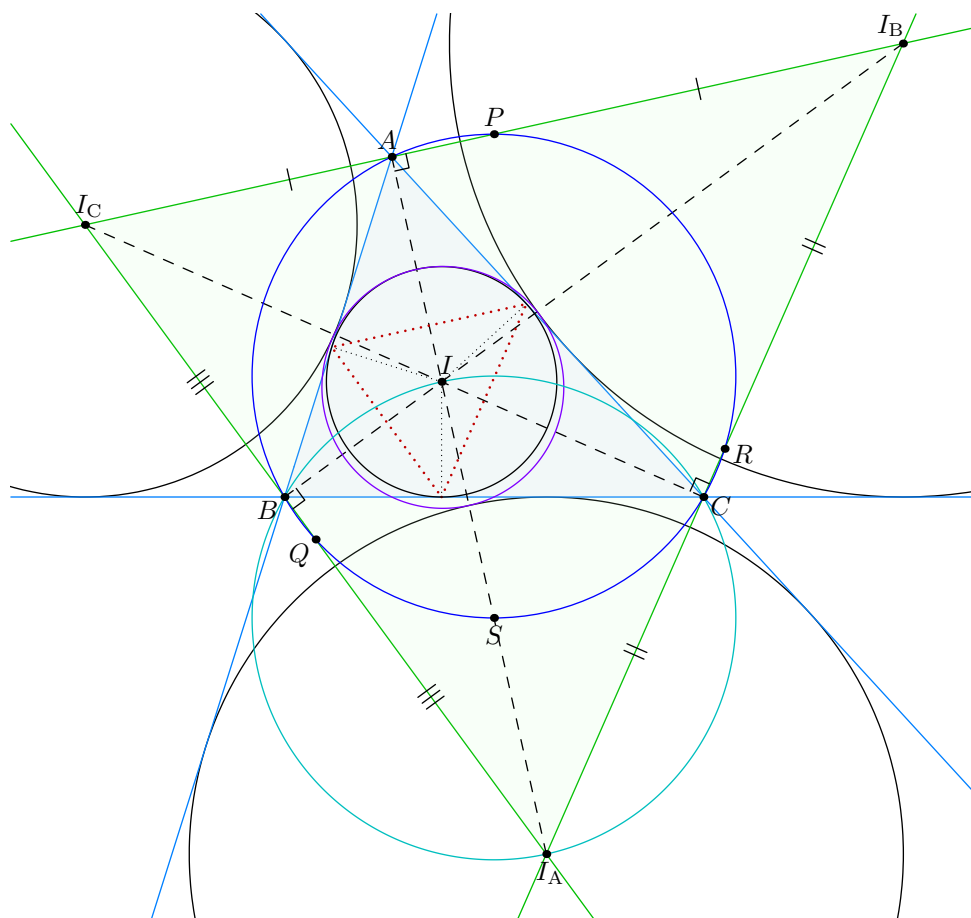
- Potrebno je uočiti da postoji prirodna homotetija sa središtem u A iz upisane u pripisanu kružnicu, primjetimo da je tangenta u D' na upisanu kružnicu paralelna sa BC jer je D' preslika točke D preko centra upisane I a BC je upravo tangenta na upisanu u točki D . BC je ujedno i tangenta na pripisanu kružnicu u točki K , time K možemo smatrati 'najvišom' točkom pripisane kružnice a D' 'najvišom' točkom upisane kružnice. Ovom opservacijom zaključujemo da se D' slika u K pod homotetijom centriranom u A te su stoga A , D' i K kolinearne točke.
- Zamijeni 'najvišom' sa 'najnižom'. Ostalo zaključivanje provodi se analogno.
- I ova tvrdnja se na kraju svodi na homotetiju, ali ovaj put s centrom u K , primjetimo da su trokuti $\triangle KDD'$ i $\triangle KNA$ slični (N je ovdje nožište okomice iz A na BC). Uistinu DD' i AN su paralelni jer su oba pravca

okomita na BC ; međutim A, D' i K po drugoj tvrdnji leže na istom pravcu a N, D i K su prema postavci na BC i time $\triangle KDD'$ i $\triangle KNA$ imaju zajednički kut pri vrhu K . Stoga možemo zamisliti homotetiju sa središtem u K koja šalje $\triangle KDD'$ u $\triangle KNA$, odnosno šalje I kao polovište stranice DD' u točku P kao polovište stranice NA . Za drugu tvrdnju promatramo negativnu homotetiju sa središtem u D i koristimo treću tvrdnju da su A, D, K' kolinearne točke.

6 Come together

Istražili smo neka osnovna svojstva kada imamo samo jednu kružnicu, no pogledajmo što sve vrijedi kada uključimo sve 3 kružnice. Neka su I_A , I_B i I_C središta pripisanih kružnica te neka su P , Q i R polovišta stranica trokuta $\triangle I_A I_B I_C$.

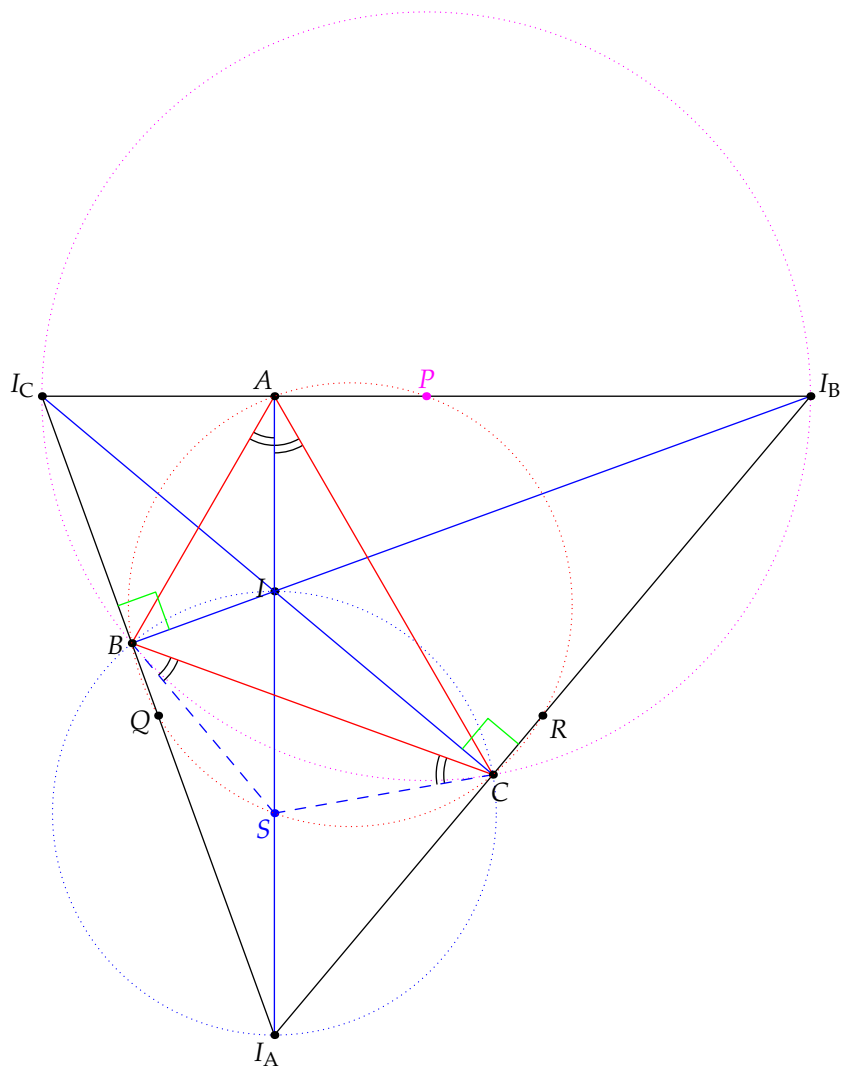
Naime I je centar upisane u sklopu $\triangle ABC$, no što je točka I kada ju promatramo u sklopu $\triangle I_A I_B I_C$? Vrijedi sljedeće (zadnju činjenicu nećemo dokazivati):



1. I je ortocentar trokuta $\triangle I_A I_B I_C$.
2. Točke I, B, C i I_A su konciklične, a središte njihove opisane kružnice je S .
3. P, Q i R leže na kružnici opisanoj trokutu ABC .
4. Ako su D, E, F dirališta upisane sa stranicama trokuta $\triangle ABC$, onda postoji homotetija između trokuta $\triangle DEF$ i $\triangle I_A I_B I_C$.
5. Feuerbachova kružnica (Eulerova kružnica, kružnica 9 točaka) trokuta $\triangle ABC$ je tangenta na upisanu kružnicu i na sve 3 pripisane kružnice.

6.1 Dokazi tvrdnji

1. AI_A je unutrašnja simetrala kuta dok je $I_C A$ odnosno AI_B simetrala vanjskog kuta. Kako je suma suplemenarnih kuteva 180° simetrale tih kuteva će zatvarati kut od 90° , dakle $I_A A \perp I_B I_C$ i $I_A A, I_B B, I_C C$ simetrale u trokutu $\triangle ABC$ su zapravo visine u trokutu $\triangle I_A I_B I_C$ a time je I ortocentar tog trokuta.
2. Iz prethodne tvrdnje imamo da su $I_C C$ i $I_B B$ okomice u trokutu $\triangle I_A I_B I_C$. Stoga imamo $\angle I B I_A = \angle I C I_A = 90^\circ$, odakle je četverokut $I B I_A C$ tetivan sa središtem u polovištu dužine $I I_A$. Dokažimo da je to polovište točka S



Kako je četverokut $ABSC$ tetivan i S polovište luka BC imamo da je

$$\angle SBC = \angle SAC = \angle SAB = \angle SCB$$

odakle je $SB = SC$. Kut $\angle SIB$ je vanjski kut pri vrhu I u $\triangle AIB$ stoga je

$$\angle SIB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

S druge strane je

$$\angle SBI = \angle SBC + \angle CBI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \angle SIB$$

odakle je $SB = SI$ Ovime smo dokazali da je točka S središte opisane kružnice $\triangle BIC$ kako i I_A leži na toj kružnici zaključujemo da je S središte kružnice opisane četverokutu IBI_AC .

Što je P četverokutu BCI_BI_C ?

- Kako su P, Q, R polovišta trokuta $\triangle I_AI_BI_C$ a A, B, C nožišta visina, spoznajemo da se zapravo radi o feuerbachovoj kružnici $\triangle I_AI_BI_C$.
- Uočimo da je simetrala kuta A okomita na DF , a s druge strane kao visina u trokutu $\triangle I_AI_BI_C$, je okomita na I_AI_C stoga su stranice DE, EF i FD redom paralelne sa stranicama I_AI_B, I_BI_C, I_CI_A . te mora postojati homotetija između trokuta $\triangle DEF$ i $\triangle I_AI_BI_C$
- Tvrđnja se može dokazati tehnikom invertiranja.

7 Zadaci

7.1 Ortocentar

Prvih par su lakši zadaci, ostali nisu poredani po težini.

1. Neka je H ortocentar trokuta, a O središte opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$. Dokažite:
 - (a) $\angle BAH = \angle CAO$;
 - (b) $\angle CBH = \angle ABO$;
 - (c) $\angle ACH = \angle BCO$.
2. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$. Neka su E i F nožišta visina iz vrhova B i C u trokutu $\triangle ABC$. Neka je točka X preslika točke H preko stranice $\overline{BC}$, a točka Y presjek tangente u A na kružnicu (AEF) s kružnicom opisanom trokutu $\triangle ABC$. Ako je O središte opisane kružnice $\triangle ABC$, dokaži da su točke X , O i Y kolinearne.
3. Neka su E i F nožišta visina iz vrhova B i C u trokutu $\triangle ABC$ i neka je H njegov ortocentar. Neka je točka T presjek pravaca EF i BC , a neka je M polovište stranice BC . Dokažite da je pravac TH okomit na pravac AM .
4. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka su D , E i F nožišta visina trokuta ABC iz vrhova A , B i C , redom. Pravci EF i BC sijeku se u točki P . Paralela s EF kroz točku D siječe pravac AC u točki Q i pravac AB u točki R . Ako je N točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\angle NQP + \angle NRP < 180^\circ$, dokaži da je $|BN| > |CN|$.

7.2 Upisana kružnica i njeni prijatelji

1. Ako je r radijus upisane kružnice a r_a, r_b, r_c radiusi pripadnih pripisanih kružnica i h_a, h_b, h_c dužine visina iz pripadnih vrhova na suprotne stranice, dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

2. Neka pravac AI siječe kružnicu (ABC) u točkama A i S . Neka je L preslika točke I preko S , a J preslika točke I preko BC . Ako je K nožište visine iz vrha A na stranicu BC , pokažite da su točke K, J i L kolinearne.
3. Upisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D , E i F . Središte te kružnice je točka S , a pravac DS siječe dužinu $\overline{EF}$ u točki P . Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$, dokaži da su točke A , P i M kolinearne.
4. (IMO 2006 P1) Neka je $\triangle ABC$ trokut sa središtem upisane kružnice I . U unutrašnjosti trokuta dana je točka P za koju vrijedi

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Pokaži da je $|AP| \geq |AI|$ i da jednakost vrijedi ako i samo ako se P podudara s I .

7.3 Mix

1. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ i neka simetrala dužine $\overline{AH}$ siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u D i E . Ako je O središte opisane kružnice $\triangle ABC$, a S središte opisane kružnice $\triangle ADE$, dokažite da je četverokut $ODSE$ tetivan.
2. (Državno 2017 2.razred) Dan je trokut $\triangle ABC$. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M . Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q . Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k .
3. Dan je trokut ABC i njemu upisana kružnica ω koja dira stranice BC , CA i AB redom u točkama D , E i F . Neka je K presjek pravaca EF i BC . Dokaži da su AD i IK okomiti.

4. Neka je P točka na opisanoj kružnici trokuta $\triangle ABC$. Dokažite da preslike točke P preko stranica trokuta leže na pravcu koji prolazi kroz ortocentar H trokuta $\triangle ABC$. (Steinerov pravac)
5. Dan je šiljastokutni trokut ABC s visinama $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ te ortocentrom H . Dužine $\overline{EF}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki G . Dužina $\overline{AK}$ je promjer kružnice opisane trokutu ABC i siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki M . Dokaži da su pravci GM i HK paralelni.
6. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez u kojem je $AB \parallel CD$. Upisana kružnica ω trokuta BCD dira $\overline{CD}$ u točki E . Neka je F točka na simetrali kuta $\angle DAC$ takva da je $EF \perp CD$. Neka kružnica opisana trokutu $\triangle ACF$ siječe pravac CD u točkama C i G . Dokaži da je trokut $\triangle AFG$ jednakokračan.
7. Neka je J središte pripisane kružnice $\triangle ABC$ nasuprot vrha A . Ta pripisana kružnica dira stranicu BC u M , a stranice AB i AC u K i L redom. Pravci LM i BJ sijeku se u F , a pravci KM i CJ sijeku se u G . Neka je S presjek pravaca AF i BC , a neka je T presjek pravaca AG i BC . Dokaži da je M polovište dužine ST .
8. (Vietnam TST 2017. 3.) Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan, raznostraničan trokut kojemu je središte opisane kružnice točka O , a ortocentar točka H . Neka su E i F nožišta visina iz B i C redom. Pravac AH siječe opisanu kružnicu trokuta (ABC) u točkama A i D . Neka je I polovište od AH . Pravac EI siječe BD u M , a pravac FI siječe CD u N . Dokaži da je $MN \perp OH$.