

Uvod

Osnovni algebarski izrazi. Izraze oblika $a, b^2, 7cd^3, \frac{3}{19}e^9$ nazivamo *monomima*, pri čemu su a, b, c, d, e *varijable*/opći brojevi. Zbroj konačno mnogo monoma se zove *polinom*. Specijalno, zbroj dva monoma zove se *binom*, a tri monoma *trinom*. Svaki izraz koji sadrži varijable zove se *algebarski izraz*.

Ponovimo neke **osnovne algebarske identitete**.

- kvadrat binoma - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- kub binoma - $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- kvadrat trinoma - $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- razlika kvadrata - $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- zbroj i razlika kubova - $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Zadatke s algebarskim izrazima najčešće rješavamo *metodom faktorizacije*, tj. zapisivanjem izraza u obliku umnoška više faktora. Za faktorizaciju obično koristimo sljedeće metode:

- izlučivanje zajedničkog faktora (svojstvo distributivnosti)
- grupiranje, zapisivanje izraza u drugom obliku - zbroj, razlika (svojstva komutativnosti i asocijativnosti)
- prethodno spomenuti algebarski identiteti

Lakši zadaci

1. Dokaži da je razlika kvadrata dva neparna prirodna broja djeljiva s 8.
2. Ako za realne brojeve x, y vrijedi $x - y = 6$ i $x^2 + y^2 = 22$, koliko je $x^3 - y^3$?
3. Usporedite brojeve $\sqrt{2014 \cdot 2016}$ i 2015.
4. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10.$$

odredi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je

$$a + b + c = 3 \quad \text{i} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Koliko je $a^2 + b^2 + c^2$?

Umjereni zadaci

6. Faktoriziraj izraz $x^4 + x^2 + 1$.
7. Faktoriziraj izraz $a^4 + 4b^4$ (identitet Sophie-Germain).

8. Neka su x, y, z različiti realni brojevi od kojih niti jedan nije jednak nuli, takvi da vrijedi

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$

Odredi vrijednost izraza $x^2 y^2 z^2$.

9. Izračunajte vrijednost izraza $(2013 - \sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2014 \cdot 2012}})^2$.

10. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24$$

pri čemu su a, b i c realni brojevi te odredi za koje a, b, c se ta vrijednost postiže.

Teži zadaci

11. Dokaži da ne postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da su oba broja

$$\sqrt{3^k + 7}, \sqrt{3^{k+1} + 7}$$

istovremeno prirodna.

12. Neka su a, b, c realni brojevi koji nisu svi jednaki, takvi da vrijedi

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Dokaži da je $a + \frac{1}{b} = -abc$.

13. Neka su m i n prirodni brojevi takvi da vrijedi $m^2 + 3(mn)^2 = 30n^2 + 517$. Odredi vrijednost $3(mn)^2$.

14. Ako su x, y, z i w realni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{x}{y+z+w} + \frac{y}{z+w+x} + \frac{z}{w+x+y} + \frac{w}{x+y+z} = 1$$

odredi

$$\frac{x^2}{y+z+w} + \frac{y^2}{z+w+x} + \frac{z^2}{w+x+y} + \frac{w^2}{x+y+z}.$$

15. Odredite sve trojke (a, b, c) realnih brojeva za koje vrijedi

$$(x^2 + 1)y = z^2 + 1$$

$$(y^2 + 1)z = x^2 + 1$$

$$(z^2 + 1)x = y^2 + 1$$

Rješenja

1.

$$(2x + 1)^2 - (2y + 1)^2 = (2x + 1 - 2y - 1)(2x + 1 + 2y + 1) = 2(x - y)2(x + y + 1)$$

Ako su x i y iste parnosti, $x - y$ je parno, a ako su različite, $x + y + 1$ je parno, dakle $(x - y)(x + y + 1)$ je djeljivo sa 2 pa je i cijeli izraz djeljiv sa 8.

2. Općinsko 2019. B varijanta - 1. razred, 1. zadatak
3. Algebarski izrazi - Zadatak 7.
4. Općinsko 2019. A varijanta - 1. razred, 2. zadatak
5. Općinsko 2011. A varijanta - 1. razred, 4. zadatak
6. Zadatak 12.
7. Izvor (faktorizacija).
8. Županijsko 2020. A varijanta - 1. razred, 3. zadatak
9. Zadatak 24.
10. Županijsko 2016. A varijanta - 1. razred, 3. zadatak
11. Zadatak 22.
12. Državno 2006. A varijanta - 1. razred, 2. zadatak
13. 1987. AIME - Problem 5
14. Državno 2017. A varijanta - 1. razred, 3. zadatak
15. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A, 4. razred, 4. zadatak