

Uvod

U ovom predavanju bavit ćemo se zadacima u kojima je zadana neka igra (najčešće između 2 igrača), te se traži da odredimo koji igrač ima pobjedničku strategiju u toj igri (što može i ovisiti o danim parametrima), ili je pak potrebno dokazati neka druga svojstva te igre. Glavni alati koje koristimo u ovakvim zadacima su

- matematička indukcija
- bojanja
- invarijante.

Usto, glavna karakteristika ovakvih zadataka je da se bavimo optimalnim strategijama za igranje igre, tj. baratamo pojmovima pobjedničke strategije i pobjedničke i gubitničke pozicije.

Definicija. U igri za 2 igrača kažemo da neki od ta 2 igrača ima pobjedničku strategiju ako postoji niz poteza kojima taj igrač može osigurati pobjedu, bez obzira na to kako drugi igrač igra.

Također, kažemo da je trenutno stanje u kojem se igra nalazi pobjednička pozicija ako igrač koji je upravo na redu ima pobjedničku strategiju, a gubitnička pozicija ako igrač koji nije trenutno na redu ima pobjedničku strategiju.

Dodatno, neke važne trikove koje koristimo u ovakvim zadacima ilustrirat ćemo u sljedeća 2 jednostavna primjera:

Primjer 1. Dva igrača igraju sljedeću igru: na hrpi se na početku nalazi n kamenčića. Svaki igrač u svom potezu može s hrpe uzeti 1, 2 ili 3 kamenčića. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić. Za koje n drugi igrač ima pobjedničku strategiju?

Počnimo s analizom igre za male n . Za $n = 1, 2, 3$ očito prvi igrač ima pobjedničku strategiju, jer mu je dopušteno uzeti sve kamenčiće s hrpe. Ako je $n = 4$, štogod prvi igrač odigra, drugi igrač može isprazniti hrpu, pa ovdje drugi igrač ima pobjedničku strategiju. Dalje razmišljamo ovako: za $n = 5, 6, 7$ prvi igrač može uzeti onoliko kamenčića da drugom igraču prepusti hrpu od 4 kamenčića, a otprije znamo da je to gubitnička pozicija za igrača koji je tada prvi na redu. To je dovoljno da zaključimo da prvi igrač ima pobjedničku strategiju. Ako je $n = 8$, štogod prvi igrač odigra, dovodi se nužno u pobjedničku poziciju, što znači da drugi igrač može u svakom slučaju osigurati pobjedu.

Možemo dalje nastaviti ovako za $n \geq 9$, ili možemo naslutiti da će drugi igrač imati pobjedničku strategiju samo ako je n višekratnik broja 4, te to dokažemo indukcijom. Kako se pobjedničke i gubitničke pozicije izmjenjuju s periodom 4, korak indukcije će uključivati dokazivanje za sljedeća 4 broja. Stoga nam za bazu trebaju slučajevi $n = 1, 2, 3, 4$, što smo već provjerili. Potom pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodne brojeve $n = 4k - 3, 4k - 2, 4k - 1, 4k$, te dokazujemo tvrdnju za $n = 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3, 4k + 4$. Uočimo sada da će korak indukcije biti gotovo identičan dokazu za $n = 5, 6, 7, 8$.

Iz ovog primjera izvlačimo sljedeći važan zaključak: *pozicija je pobjednička ako postoji potez koji vodi u gubitničku poziciju, a pozicija je gubitnička ako svi potezi koje igrač koji je na redu može odigrati vode u pobjedničku poziciju.*

Primjer 2. (Šah s dva poteza) Dva igrača igraju šah sa standardnim pravilima s jednom iznimkom: svaki igrač koji je na redu može odigrati 2 poteza umjesto jednog. Koji igrač može osigurati neriješen ishod ili pobjedu?

Pretpostavimo da drugi igrač može uvijek pobijediti, tj. da prvi igrač gubi bez obzira na poteze drugog igrača. Prvi igrač tada gubi i ako kao svoja prva dva poteza pomakne skakača na slobodno polje, te ga potom vrati natrag na početno polje. Sada je drugi igrač na redu, a kako je raspored figura isti kao i na početku, on je osuđen na poraz. No, tada istovremeno drugi igrač uvijek gubi i uvijek pobjeđuje, što očito ne može vrijediti. Dakle, drugi igrač nema pobjedničku strategiju, tj. prvi igrač može osigurati remi ili pobjedu, bez obzira na to kako će drugi igrač igrati. Uočite da ovime nismo ništa rekli o samoj strategiji za prvog igrača, dokazali smo samo njezino postojanje.

Lakši zadaci

1. Na hrpi je n kamenčića ($n \in \mathbb{N}$). Dvojica igrača s hrpe naizmjenice uzimaju m kamenčića ($m \geq 1$), a pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić. Za koje n drugi igrač ima pobjedničku strategiju ako m ne smije biti:
a) složen broj b) prost broj?
2. Na stolu su dvije neprazne hrpe kamenčića. Dva igrača naizmjenice s jedne od hrpa uzimaju po volji mnogo kamenčića. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić. Za koje rasporede kamenčića na hrpama drugi igrač ima pobjedničku strategiju?
3. Igrači A i B igraju igru sa skakačem na šahovskoj ploči: prvo igrač A postavi skakača na bilo koje polje na ploči, a potom počevši od igrača B igrači naizmjenice pomiču skakača na način na koji se skakač miče u šahu. Gubi onaj igrač koji ne može postaviti skakača na polje koje je skakač već posjetio. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?
4. Dva igrača igraju igru s čokoladom koja se sastoji od $m \times n$ kockica, te je broj kockica veći od 1. Igrači naizmjenice biraju jednu od preostalih kockica te odlome (i pojedu) sve kockice koje se nalaze u istom redu desno i u istom stupcu dolje u odnosu na odabranu, te i sve one koje su time ostale odvojene od ostatka čokolade (pri čemu gornja lijeva kockica čokolade ostaje nepojedena). Gubi onaj igrač koji pojede zadnju kockicu (tj. onu u gornjem lijevom kutu) jer je to nepristojno. Za koje veličine čokolada drugi igrač ima pobjedničku strategiju?
5. U prostoriji se nalazi okrugli stol te dovoljno velik broj novčića u kutiji. Dva igrača naizmjenice postavljaju po jedan novčić iz kutije bilo gdje na stol, pri čemu se novčići ne smiju međusobno preklapati. Gubi onaj igrač koji u nekom trenutku ne može postaviti novčić na stol. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?
6. Dana je bijela kvadratna ploča sa 64 polja. Anica i Božica igraju sljedeću igru: prvo Anica oboji n polja u crvenu boju, a potom Božica odabire 4 retka i 4 stupca te sva polja u njima oboji crno. Božica pobjeđuje ako nije ostalo nijedno crveno polje na ploči; u suprotnom pobjeđuje Anica. Odredite najmanji n takav da Anica može osigurati pobjedu bez obzira na potez Božice.

Teži zadaci

7. Na ploči na početku piše n uzastopnih prirodnih brojeva, gdje je n veći od 10. Anica i Božica naizmjenice brišu po jedan broj s ploče, dok ne ostanu 2 broja na ploči. Anica pobjeđuje ako su ta 2 broja relativno prosta, a u suprotnom pobjeđuje Božica. Za koje n Anica ima pobjedničku strategiju?
8. Anica i Božica igraju igru. Prvo Božica napiše 9 prirodnih brojeva na ploču, a onda Anica pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki višestrukim ponavljanjem sljedećeg postupka: u jednom koraku ona odabire 2 broja i mijenja svaki od njih njihovim zbrojem. Može li Božica odabrati brojeve tako da Anica ne može ostvariti svoj naum?
9. Anica i Božica igraju igru sa sljedećim pravilima. Na početku postoji hrpa s $n \geq 2$ kamenčića. Prvo Anica makne s hrpe bilo koji broj kamenčića tako da hrpa ne ostane prazna, a zatim njih dvije naizmjenice miču kamenčiće s hrpe tako da ako je u prethodnom potezu maknuto k kamenčića, u sljedećem potezu ih smije biti maknuto najviše $2k - 1$. Za koje n Božica ima pobjedničku strategiju, ako pobjeđuje ona koja makne zadnji kamenčić?
10. Anica i Božica igraju sljedeću igru, uz dani prirodni broj n . Anica prvo napiše broj 1, a potom naizmjenice svaka od njih zapiše broj za 1 veći ili duplo veći od prethodnog, pri čemu nijedan napisani broj ne smije biti veći od n . Pobjeđuje igrač koji napiše broj n . Za koje n Božica ima pobjedničku strategiju?

Hintovi

1. Provjerite za male n tko ima pobjedničku strategiju, naslutite rješenje te ga pokažite indukcijom.
2. Kao i u 1. zadatku, na malim primjerima provjerite tko ima pobjedničku strategiju, naslutite rješenje te ga pokažite indukcijom.
3. Tko od igrača i na koji način može osigurati da postoji dostupno neposjećeno polje nakon svakog poteza? Smislite "algoritam" kojim biste to osigurali.
4. Možete li naći kombinaciju dva poteza koji su istovjetni sa samo jednim potezom? Što iz toga možete zaključiti?
5. Ponovno pokušajte za jednog igrača naći algoritam pomoću kojeg ćemo biti sigurni da taj igrač može uvijek odigrati potez.
6. Pokušajte naći taj n konstruiranjem primjera.
7. Sjetite se da su uzastopni brojevi relativno prosti. Usto, nađite najveći podskup tih n brojeva među kojima nikoja 2 nisu relativno prosta. Kako i kada bi Božica mogla osigurati da neka 2 broja iz tog skupa ostanu zapisana na ploči?
8. Nađite invarijantu, tj. svojstvo koje se neće promijeniti ponavljanjem postupka.
9. Na malim primjerima pokušajte naslutiti za koje n Božica ima pobjedničku strategiju. Zatim nađite što jednostavnije strategije koje Božica i Anica mogu primijeniti te pokažite da one funkcioniraju općenito.
10. Na malim primjerima naslutite koji n su rješenje te induktivnim zaključcima to i dokažite (ti induktivni zaključci neće biti baš standardni).

Rješenja

- a) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n = 4k, k \in \mathbb{N}$. Pokažimo to indukcijom s korakom 4. Baza uključuje provjeru za $n = 1, 2, 3, 4$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve manje ili jednake od $4k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada ako je broj kamenčića na hrpi na početku $4k + 1, 4k + 2$ ili $4k + 3$, prvi igrač uzme redom 1, 2 ili 3 kamenčića, čime na hrpi ostane $4k$ kamenčića, a po pretpostavci ta pozicija je pobjednička za igrača koji tad nije na redu, dakle za onog koji je prvi uzeo kamenčiće s hrpe. Za $n = 4k + 4$ prvi igrač ne može uzeti broj kamenčića djeljiv s 4 (jer je to sigurno složen broj), pa će se, štogod odigra, naći u za njega gubitničkoj poziciji.

b) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n \in \{2, 5, 7\}$. Za $n \leq 8$ direktno provjerimo koji igrač ima pobjedničku strategiju. Pretpostavimo da za neki $k \geq 8$ vrijedi da jedino za $n \in \{2, 5, 7\}$ drugi igrač ima pobjedničku strategiju. Dokažimo da za $n = k + 1$ prvi igrač ima pobjedničku strategiju. Ako je $k + 1$ paran broj, prvi igrač uzme $k - 1$ kamenčić čime ostanu samo 2, pa je to pobjednička pozicija za prvog igrača po pretpostavci indukcije. Inače prvi igrač uzme $k - 4$ ili $k - 6$ kamenčića, ovisno o tome koji od tih brojeva je djeljiv s 4 (čime znamo da je složen), te ostaje 5 ili 7 kamenčića, zbog čega znamo da prvi igrač pobjeđuje.
- Tvrdimo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju onda kada je na početku na hrpama jednako mnogo kamenčića. Ako je na obje hrpe po 0 ili 1 kamenčić, očito drugi igrač pobjeđuje, dok ako je na jednoj hrpi 0 ili 1, a na drugoj više od tog broja kamenčića, prvi igrač uzme sve osim jednog kamenčića s veće hrpe čime si je osigurao pobjedu. Pretpostavimo da postoje $k, l \in \mathbb{N}$ veći od 1 takvi da tvrdnja vrijedi za sve rasporede kamenčića (m, n) , gdje je $m < k$ ili $n < l$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za raspored kamenčića (k, l) . Ako je $k = l$, štogod da prvi igrač napravi na hrpama više neće biti jednako mnogo kamenčića, čime drugi igrač ima pobjedničku strategiju. Ukoliko je $k \neq l$, prvi igrač uzme s veće hrpe onoliko kamenčića da ostane jednako kamenčića na obje hrpe, čime si po pretpostavci može uvijek osigurati pobjedu. (*Razmislite zašto smo ovakvim provođenjem indukcije tvrdnju dokazali za sve moguće rasporede hrpa.*)
- Tvrdimo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju. Podijelimo ploču u 4 kvadrata dimenzija 4×4 , te svaki obojimo u 8 boja (ukupno 32 boje): ako boje označimo brojevima od 1 do 8, retke obojimo redom s (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (2, 1, 4, 3), te (6, 5, 8, 7) (bit je da su 2 po 2 polja obojena istom bojom i da skakač može skočiti u jednom skoku između 2 polja iste boje). Sada kada prvi igrač stavi skakača na proizvoljno polje, drugi igrač pomakne skakača na preostalo drugo polje te boje. Zatim prvi igrač sigurno mora pomaknuti skakača na polje dosad neposjećene boje, a onda drugi igrač sigurno može pomaknuti skakača na drugo polje te boje, budući da je tek u prethodnom skoku skakač po prvi puta posjetio polje te boje. Dakle, nakon što prvi igrač odigra potez, drugi igrač će također moći odigrati potez. Stoga će prvi igrač biti prvi koji neće moći napraviti potez.
- Pretpostavimo da prvi igrač uvijek gubi. Tada on gubi i ako odlomi samo kockicu u desnom donjem kutu. No, nakon što drugi igrač odigra svoj potez, komad čokolade koji je ostao mogao je ostati i odmah nakon prvog igrača. Stoga je drugi igrač u gubitničkoj poziciji, no to je nemoguće. Dakle, prvi igrač uvijek ima pobjedničku strategiju.
- Prvi igrač ima pobjedničku strategiju. Naime, on može igrati na sljedeći način: prvi novčić postavi točno na sredinu stola, a zatim gdje god drugi igrač stavi novčić, prvi igrač svoj novčić stavi na centralnosimetričnu poziciju u odnosu na prethodno postavljeni novčić. Uočimo da je nemoguće da prvi igrač ne može tako postaviti svoj novčić, pa se jedino drugom igraču može dogoditi da ne može postaviti svoj novčić.
- Tvrdimo da je najmanji takav n jednak 13. Ako poljima pridružimo oznake (i, j) , gdje i označava redak, a j stupac u kojem se nalazi polje, te Anica u crveno oboji polja (1, 1), (2, 2), ..., (8, 8), (1, 8), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), Božica ne može nikako prebojati sva crvena polja u crno na dopušteni način. Ostaje pokazati da kako god Anica rasporedi 12 crvenih polja, Božica ih može sve prebojati u crno.

U tu svrhu, uočimo da 4 retka koja imaju najviše crvenih polja moraju sadržavati barem njih 8. Naime, u suprotnom bi jedan od tih redaka imao najviše jedno crveno polje. S druge strane, preostala 4 retka imala bi barem 5 crvenih polja, dakle jedan redak bi imao barem 2 polja. No, tada nismo odabrali 4 retka s najviše crvenih polja, čime dolazimo do kontradikcije. Sada ta 4 retka Božica preboji u crno, a preostala do 4 crvena polja se očito mogu prebojati odabirom 4 stupca.
- Prvo pretpostavimo da je n neparan. Tada Anica prvo obriše jedan od rubnih brojeva, a preostale (u glavi) podijeli u parove koji se sastoje od 2 uzastopna brojeva. Tada kad Božica obriše neki broj, Anica obriše drugi

iz tog para. Time će na kraju ostati dva uzastopna broja za koje znamo da su relativno prosti. Dakle, u ovom slučaju Anica ima pobjedničku strategiju.

Sada pretpostavimo da je n paran; tada se među tim brojevima nalazi po $\frac{n}{2}$ parnih i neparnih brojeva. Ukoliko ostanu dva parna broja, Božica pobjeđuje, pa je stoga Božici u interesu da briše neparne brojeve. Tada Anica, da spriječi takav razvoj događaja, mora brisati isključivo parne brojeve (jer čim obriše jedan neparan, a Božica briše samo neparne, ostat će 2 parna broja na kraju). Dakle, prije no što njih dvije povuku zadnji potez, ostat će po 2 parna i neparna broja. Anica je opet prisiljena obrisati paran broj (jer inače Božica može ostaviti 2 parna broja na ploči). Dakle, bilo bi dobro da ta 2 neparna broja ne budu relativno prosta, i to Božica zaista može osigurati, jer će se među 12 uzastopnih prirodnih brojeva naći dva neparna koja su djeljiva s 3. Stoga Božica može obrisati sve neparne brojeve osim ta 2 koja su djeljiva s 3, te u zadnjem koraku preostali parni. Iz ovoga svega zaključujemo da Božica u ovom slučaju ima pobjedničku strategiju.

8. Uočimo sljedeće: ako Božica napiše brojeve takve da se najveći broj pojavljuje parno mnogo puta, štogod Anica napravi to se neće promijeniti. To se direktno provjeri provjerom svih mogućih slučajeva (zbrajamo li dva najveća broja, dva broja koji nisu najveći, ili najveći s nekim koji nije), te pazimo na sve moguće rezultate. Dakle, ako se na početku najveći broj pojavljuje parno mnogo puta, Anica neće moći naposljetku dobiti da se najveći broj pojavljuje 9 puta. Stoga Božica može odabrati takve brojeve.
9. Provjerom malih primjera naslućujemo da Božica pobjeđuje ako je n potencija broja 2. Ukoliko n nije potencija broja 2, n možemo zapisati u obliku $n = 2^k \cdot m$, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$, a m neparan prirodni broj veći od 1. Anica slijedi ovaj algoritam: prvo Anica makne 2^k novčića, a zatim kad Božica makne $2^{k'} \cdot m'$ kamenčića, Anica makne $2^{k'}$ kamenčića (koliko ih zaista smije uzeti). Uočimo da je $k' \leq k$ (jer Božica može uzeti najviše $2^{k+1} - 1$ kamenčića, te se analogno ovome k' iz poteza u potez neće povezati. Stoga će nakon Aničinog poteza broj kamenčića biti djeljiv s $2^{k'+1}$, a u sljedećem potezu Božica može uzeti najviše $2^{k'+1} - 1$ kamenčića, pa ne može uzeti zadnji. Dakle, Anica će uzeti zadnji kamenčić u ovome slučaju.

Ukoliko je n potencija broja 2, Božica će igrati na isti način kao Anica u gornjem slučaju. Stoga u ovom slučaju Božica ima pobjedničku strategiju.

10. Pokazat ćemo da su traženi n oni koji se mogu prikazati kao zbroj različitih potencija broja 2 s neparnim eksponentima. Na početku uočimo da za neparne n Anica ima pobjedničku strategiju. Naime, prvi broj koji će Božica napisati bit će broj 2 (dakle paran), pa zatim ako Anica stalno dodaje broj 1 prethodnom, Božica će stalno pisati parne, a Anica neparne, pa će Anica biti ta koja će napisati broj n .

Nadalje, dokazujemo sljedeću tvrdnju: Božica ima pobjedničku strategiju za broj n ako i samo ako ima pobjedničku strategiju za $4n$ i $4n + 2$. Neka Božica ima pobjedničku strategiju za n . Ona stoga može igrati kao da se igra do broja n , čime će natjerati Anicu da prva napiše broj j koji je veći od n (a on će biti i manji ili jednak od $2n$). Tada Božica napiše $2j$, te je $2n + 2 \leq 2j \leq 4n$. Sada je jedini dopušteni potez povećanje broja za 1, a kako su $2j$, $4n$ i $4n + 2$ parni, jasno je da će Božica pobijediti. Analogno zaključimo da ako Anica ima pobjedničku strategiju za neki n , onda ju ima i za $4n$ i $4n + 2$. Ovi zaključci su dosta da na osnovi ručne provjere za $n = 1, 2, 3, 4$ dokažemo početnu tvrdnju.