S13	Srednja grupa

Predavanja subotom
sezona 2020./2021.

Nizovi

Nika Utrobičić

27. veljače 2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Niz u skupu S je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to S$. Ona prirodnom broju n pridružuje element a_n skupa S. Element a_n nazivamo općim ili n-tim članom niza, a sam niz označavamo simbolom (a_n). Niz ima beskonačno mnogo članova:

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Aritmetički niz - ako je $a_n - a_{n-1} = d$, $n \geq 2$, d je konstanta
Suma prvih n članova aritmetičkog niza je: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.
Geometrijski niz - ako je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$, $n \geq 2$, q je konstanta
Suma prvih n članova geometrijskog niza s kvocijentom $q \neq 1$: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$.
U zadacima s nizovima često je korisno niz ograničiti. Korisna će nam biti i matematička indukcija.

Lakši zadaci

1. Neka je $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$, $p_n, \ldots$ niz svih prostih brojeva poredanih po veličini. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost
$$p_n \geq 3n - 5.$$

2. Ako je $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, dokažite da je
$$x_{1994}^2 + x_{1994} < 1.$$

3. Neka je
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{3}, \quad \ldots$$
$$c_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}.$$
Dokažite da vrijedi
$$c_n^2 + 2(c_n - c_1)^2 + 2(c_n - c_2)^2 + \ldots + 2(c_n - c_{n-1})^2 = n.$$

4. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_{41}$ aritmetički niz takav da je
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}}$$
prirodni broj. Ako je $a_1 = 1$, a razlika niza prirodni broj, odredi razliku niza.

5. Dan je niz pozitivnih realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ takvih da vrijedi
$$a_1 = 1 - a_0,\ \ a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) \text{ za } n \geqslant 1$$
Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi
$$a_0 a_1 ... a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right) = 1$$

Umjereni zadaci

6. niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zadan rekurzivno s $a_1 = 1$, $a_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} + 1$, za $n \geq 2$. Odredite najmanji realni broj M takav da je
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M$$
za svaki $m \in \mathbb{N}$.

7. a) Neka je k prirodni broj. Dokaži da aritmetički niz čija je razlika prirodni broj ili ne sadrži niti jednu k-tu potenciju prirodnog broja ili ih sadrži beskonačno mnogo.

   b) Postoji li aritmetički niz čija je razlika prirodni broj koji sadrži beskonačno mnogo kubova prirodnih brojeva, ali ne sadrži niti jedan kvadrat prirodnog broja?

8. Neka je C realni broj, (a_n) niz realnih brojeva i neka je, za svaki prirodni broj n,
$$M_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$
Ako za svaka tri međusobno različita prirodna broja i, j i k vrijedi
$$(i - j)M_k + (j - k)M_i + (k - i)M_j = C,$$
dokaži da je niz (a_n) aritmetički.

9. Za dani prirodni broj n neka je $M(n)$ najveći prirodni broj za koji je moguće konstruirati niz prirodnih brojeva $x_1, x_2, \dots, x_{M(n)} \in \{2, 3, \dots, n\}$ tako da vrijedi:

   Za svaka dva različita broja $i, j \in \{1, 2, \dots, M(n)\}$ brojevi $2^{x_i} - 1$ i $2^{x_j} - 1$ su relativno prosti.

   Ako je $M(k) = M(k - 1)$ za neki prirodni broj $k > 1$, dokaži da je k složen.

10. Neka je $(a_n), n \in \mathbb{N}$ rastući niz prirodnih brojeva. Za član a_k tog niza kažemo da je "dobar" ako se može prikazati kao suma nekih drugih (ne nužno različitih) članova tog niza. Dokažite da su svi članovi tog niza, osim njih konačno mnogo, "dobri".

Teži zadaci

11. Za prirodni broj d definiran je niz $a_0 = 1$, te $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, ako je a_n paran, a $a_{n+1} = a_n + d$, ako je neparan. Za koje vrijednosti d postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n = 1$?

12. Odredi sve nizove $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}a_{n+3} - 200$.

13. Za svaki cijeli broj $a_0 > 1$ definiran je niz $a_0, a_1, a_2, ...$ tako da je za svaki $n \geqslant 0$
$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ako je } \sqrt{a_n} \text{ cijeli broj} \\ a_n + 3 & \text{inače.} \end{cases}$$
Odredi sve vrijednosti broja a_0 za koje postoji broj A takav da je $a_n = A$ za beskonačno mnogo vrijednosti n.

14. Niz realnih brojeva (a_n) valjan je ako vrijede sljedeći uvjeti:

    (a) $a_0 \in \mathbb{N}$

    (b) $a_{i+1} = 2a_i + 1$ ili $a_{i+1} = \frac{a_i}{a_i+2}$

    (c) $a_k = 2014$ $\exists k \in \mathbb{N}$

    Koji je najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da postoji valjan niz u kojem je $a_n = 2014$?

15. Zadan je strogo rastući niz prirodnih brojeva (a_n). Za bilo koja 4 broja a_x, a_y, a_z, a_w takva da $x < y \leq z < w$ i $x + w = y + z$ vrijedi
$$a_x + a_w > a_y + a_z$$
. Koji je najmanji mogući a_{2020}?

Hintovi:

1. Indukcija
2. Provedi indukciju po 2n.
3. Indukcija
4. Teleskopiranje
5. Indukcija
6. Podijeli sve s $a_1a_2...a_n$ pa nekako prikaži ovu sumu u zatvorenom obliku.
7. Pretpostavi da neka potencija je u nizu, pa dokaži da su i potencije određenog oblika kojeg si napravio od ove prve također u nizu. pod b), kako se možeš riješiti ovog uvjeta o kvadratu jednostavno?
8. izračunaj C. Što možeš zaključiti o M_n, M_{n+1}, M_{n+2}?
9. Svedi ovaj uvjet na nešto puno jednostavnije!
10. POGLEDAJ RJEŠENJE OVOG ZADATKA!!!!!!!!!!!!
11. Koliko velik može biti a_n?
12. Što se dogodi kada oduzmemo dvije takve jednakosti?
13. ostatak kvadrata pri dijeljenju sa 3.
14. Korisno je ići ”unazad”.
15. Uvrsti neke konkretne vrijednosti pa nekako provedi indukciju!

Rješenja:

1. Općinsko 1997. 4. razred
2. Općinsko 1994. 4. razred
3. Županijsko 1997. 4. razred
4. Općinsko 2018. 4. razred
5. Županijsko 2017. 4. razred
6. Državno 2005. 4. razred
7. Državno 2010. 4. razred
8. Državno 2019. 4. razred
9. Državno 2010. 4. razred
10. Državno 2002. 4. razred
11. HMO 2011, 2. dan
12. HMO 2011, MEMO test
13. IMO 2017.
14. APMO 2015.
15. NZMOC Squad Assignment 2010.