

Uvod

Tema ovog predavanja će biti geometrijski zadaci u kojima se do rješenja dolazi raspisivanjem duljina. Neka će biti očito da treba raspisivati duljine, ali često se dogodi da geometrijski zadatak ima više rješenja i da ona koja koriste length-chase nisu najjednostavnija. Zato u svakom geometrijskom zadatku kad planirate length-chasati, razmislite o tome kako bi povezali to s tvrdnjom zadatka. Raspisivanje bez ikakvog cilja je ono što često natjecateljima troši vrijeme i ne vodi do rješenja. Evo za početak nekoliko alata za length chasing:

Talesov poučak o proporcionalnim dužinama, sličnost, potencija točke

Pitagorin poučak, kriterij ortogonalnosti

Površine

Tangencijalni četverokut, tetivni četverokut (Ptolomejev teorem)

Poučak o simetrali kuta

Cevin teorem, Menelajev teorem

Poučak o sinusu, poučak o kosinusu.

Lakši zadaci

1. Neka je ABC trokut takav da je $3|BC| = |AC| + |AB|$. Neka je T točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $4|AT| = |AC|$ i neka su K i L točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom, takve da je $KL \parallel BC$ i da je pravac KL tangenta upisane kružnice trokuta ABC . U kojem omjeru dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$?
2. Dana je dužina AD duljine 3. Neka su B i C ($C \neq A$) točke na kružnici s promjerom $\overline{AD}$ takve da vrijedi $|AB| = |BC| = 1$. Izračunaj $|CD|$.
3. Unutar šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka P takva da je $\angle APB = \angle CBA + \angle ACB$ i $\angle BPC = \angle ACB + \angle BAC$. Dokaži da vrijedi $\frac{|AC||BP|}{|BC|} = \frac{|BC||AP|}{|AB|}$.
4. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da vrijedi $|AD| = |CD|$, $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$. Dokaži da je $2|BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + 2|AB||BC|\sin\angle CBA$.
5. Neka je ABC trokut i K , L , M točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ takve da se AK , BL i CM sijeku u istoj točki. Dokaži da među trokutima ALM , BMK i CKL postoje dva čiji je zbroj radijusa upisanih kružnica veći od radijusa upisane kružnice trokuta ABC .
6. Neka je $ABCD$ jednakokrani trapez s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dijagonale trapeza sijeku se u točki S , a polovište stranice $\overline{AD}$ je točka M . Kružnica opisana trokutu BCM ponovno siječe stranicu $\overline{AD}$ u točki K . Dokaži da su pravci SK i AB međusobno paralelni.

Teži zadaci

7. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka su D , E i F nožišta visina trokuta ABC vrhova A , B i C , redom. Pravci EF i BC sijeku se u točki P . Paralela s EF kroz točku D siječe pravac AC u točki Q i pravac AB u točki R . Ako je N točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\angle NQP + \angle NRP < \pi$, dokaži da je $|BN| > |CN|$.

8. Zadan je trokut ABC takav da je $|AB| = |AC|$. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom. Neka je P sjecište pravca AN s opisanom kružnicom trokuta AMC , različito od A . Pravac kroz točku P paralelan s BC siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama B_1 i C_1 . Dokaži da je trokut AB_1C_1 jednakokraničan.
9. Točka M se nalazi u unutrašnjosti trokuta ABC . Pravac AM siječe kružnicu opisanu trokutu MBC još jednom u točki D , pravac BM kružnicu opisanu trokutu MCA još jednom u točki E , a pravac CM kružnicu opisanu trokutu MAB još jednom u točki F . Dokaži da vrijedi $\frac{|AD|}{|MD|} + \frac{|BE|}{|ME|} + \frac{|CF|}{|MF|} \geq \frac{9}{2}$.
10. Na stranici $\overline{AB}$ tetivnog četverokuta $ABCD$ postoji točka X sa svojstvom da dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja dužinu $\overline{CX}$, a dijagonala $\overline{AC}$ raspolavlja dužinu $\overline{DX}$. Koliki je najmanji mogući omjer $\frac{|AB|}{|CD|}$ u takvom četverokutu?
11. Pretpostavimo da je P točka unutar trokuta ABC takva da vrijedi $\frac{|AP|+|BP|}{|AB|} = \frac{|BP|+|CP|}{|BC|} = \frac{|CP|+|AP|}{|CA|}$. Neka pravci AP , BP , CP ponovno sijeku trokutu ABC opisanu kružnicu redom u A' , B' i C' . Dokaži da trokuti ABC i $A'B'C'$ imaju zajedničku upisanu kružnicu.
12. Zadan je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom u C , H nožište visine iz C . Neka je D točka unutar trokuta BCH takva da pravac CH raspolavlja $\overline{AD}$, a P presjek pravaca BD i CH . Zatim označimo s k kružnicu s promjerom BD , a s Q diralište tangente na k kroz P pri čemu su Q i C na istoj strani pravca BD . Dokaži da se pravci AD i CQ sijeku na k .

Hintovi

1. sličnost i karakterizacija tangencijalnog četverokuta
2. Ptolomej
3. teorem o sinusu
4. teorem o kosinusu
5. Cevin teorem; promatraj radijuse kružnica AML, CKL, BMK, usporedi najveće s radijusom od ABC.
6. Postoji i sintetičko rješenje, ali za rješenje length-chaseom prvo dobro prevedi uvjete i tvrdnju u jednakosti omjera nekih stranica. Uoči da se te stranice mogu preslikati na osnovicu trapeza i očuvat će se omjeri.
7. Ceva i Menelaj, što slijedi iz njih? Uoči da u tvrdnji možemo znakove nejednakosti zamijeniti znakove jednakosti (promotri što se događa pomičemo li točku N)
8. Uoči da bi P trebalo biti središte kružnice BMC. Konstruiraj P' kao točku za koju vrijedi tvrdnja zadatka i preko udaljenosti od A dokaži da su P i P' ista točka. Ne zaboravi na teoreme o kosinusu i sinusu
9. Ptolomej i sličnosti, pokušaj dobiti nejednakost koja je simetrična po nečemu (nešto što bi se moglo zamijeniti s x, y, z).
10. teorem o sinusu
11. Prvo preko formula za površinu dokaži da su radijusi jednaki. Nakon toga promatraj simetrale kutova da dokažeš da su središta jednaka.
12. Čemu još pripada sjecište AD i CQ ? Definiraj ga kao presjek toga i k , zatim kreni length-chaseati (u ovom zadatku ima lijepih stvari za to, uključujući neke sličnosti)

Rješenja

1. Izvor.
2. Izvor.
3. Izvor.
4. Izvor.
5. Izvor.
6. Izvor (MEMO test, zadatak 3)
7. Izvor.
8. Izvor.
9. Izvor. (2.dan 3.zadatak)
10. Izvor. (2.dan, 3. zadatak)
11. Izvor. (2.dan, 3. zadatak)
12. Izvor.