Prebrojavanja

Andrija Tomorad

19.12.2020.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Tema ovog predavanja bit će osnovni principi prebrojavanja i upoznavanje s konceptom dvostrukog prebrojavanja. U osnovnoj školi ste se vjerojatno sreli s takvim zadacima (Koliko ima n-znamenkastih brojeva takvih da ... ?) pa ćemo se više baviti poopćenjem takvih zadataka. Mogli bi reći da se gotovo svi zadaci tog tipa svode na prebrojavanje podskupa nekog skupa (npr. n-znamenkaste brojeve možemo promatrati kao podskupove od 0, 1, 2 ,... 9, no to nije baš matematički precizno. Često ćemo imati pitanja "Je li bitan redosljed elemenata u podskupu?" i "Može li se neki element pojaviti više puta?" (ako je u pitanju ono što odgovara službenoj definiciji podskupa, odgovor je ne na oba pitanja, ali ne će u svakom zadatku biti tako). Više o tome u primjeru 2, a prije toga idemo na nešto fundamentalnije:
PRIMJER 1:
a) (princip Kartezijevog umnoška) - $|A| = a, |B| = b => |A \times B| = ab$, tj. Ako se prvi dio posla može obaviti na a načina, a drugi na b načina, onda se cijeli posao može obaviti na ab načina (umnožak brojeva načina). Induktivno zaključujemo analognu tvrdnju za posao s n djelova. To ste koristili u opisanim osnovnoškolskim zadacima, jedan dio posla jest biranje jedne znamenke.
b) (princip sume) - $|A| = a, |B| = bA \cap B = \emptyset => |A \cup B| = a + b$, samo po sebi je vrlo trivijalan, no uz njega dolazi važna napomena. Kad biramo elemente podskupa ili znamenke broja (opisano pod a)), nekad će se dogoditi da nam odabir u jednom dijelu utječe na mogućnosti izbora u sljedećem dijelu, tada trebamo rastaviti na slučajeve i primjeniti princip sume.
c) (princip bijekcije) - postoji bijekcija iz A u $B => |A| = |B|$. Evo zadatka za demonstraciju principa bijekcije: Kocka ima sve strane različite boje. Koliko ima različitih kombinacija boja koje možemo vidjeti u istom trenutku? Neka je O proizvoljna točka u prostoru ("oko"). Strana kocke je viđena ako postoji neka točka T strogo unutar nje takva da dužina $\overline{OT}$ ne sadrži niti jednu točku kocke osim T.
PRIMJER 2: Na koliko načina možemo podijeliti k nagrada na n osoba tako da a) nagrade su različite i svaka osoba može dobiti samo jednu b) nagrade su različite i svaka osoba može dobiti neograničeno mnogo c) nagrade su iste i svaka osoba može dobiti samo jednu d) nagrade su iste i svaka osoba može dobiti neograničeno mnogo ?
PRIMJER 3: (dvostruko prebrojavanje) Imamo n podskupova skupa $1, 2, ..., 12$, svaki ima šest elemenata. Ako je poznato da se svaki element nalazi u 3 različita podskupa, odredi n. Što zapravo prebrojavamo u uvom primjeru. Na koje načine to prebrojavamo ? (Od čega počinjemo ?)

1. a) Na koliko načina možemo u 15 ili manje poteza doći iz ishodišta u točku (8,5)? Jedan potez je promjena jedne koordinate za ± 1. b) Na koliko načina možemo u najmanje moguće poteza doći iz ishodišta u (10, 15) kroz točku (6,5), ali ne kroz (8,8)?

2. Na koliko načina možemo popuniti 4x4 kvadrat brojevima 1,2,...,16 (svaki broj točno jedanput) tako da suma svakog retka kao i suma svakog stupca bude neparna?

3. Na jednoj obali rijeke nalazi se 20 sela, a na drugoj 15. Na koliko načina možemo izgraditi mostove tako da svaki most povezuje točno dva sela, nikoja dva se ne sijeku te iz svakog sela u svako postoji put koji prolazi mostovima, ali ne cestama koje povezuju sela na istoj strani rijeke?

4. Na koliko načina može 8 bračnih parova stati u red (16 mjesta) tako da svaka žena stoji ispred svojeg muža?

5. Izračunaj $\sum_{x=1}^{100} \sum_{y=1}^{100} \sum_{z=1}^{100} min(x, y, z)$

6. Neka je p_m broj permutacija skupa $1, 2, ..., n$ koja ima točno m fiksnih točaka. Dokaži $\sum_{k=1}^{n} kp_k = n!$

7. Zadan je skup od 100 elemenata. Na koliko načina možemo odabrati njegove podskupove $P_1, P_2, ...P_{10}$ takve da je $P_1 \subseteq P_2 \subseteq ... \subseteq P_{10}$?

8. Sto kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne. Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?

9. Neka je C prirodni broj manji od 2017. Točno C vrhova pravilnog 2017-erokuta je crveno, a svi ostali vrhovi su plavi. Dokaži da broj jednakokračnih trokuta čija su sva tri vrha iste boje ne ovisi o rasporedu crvenih i plavih vrhova.

10. Na vagi je nekoliko utega, na svakom piše jedno ili više imena. U jednom potezu možemo pozvati osobu i ona će sve utege sa svojim imenom prebaciti na drugu stranu. Ako je na početku lijeva strana teža, dokaži da možemo postići da desna strana bude teža.

11. Na natjecanju je sudjelovalo n učenika i svaki učenik je riješio točno tri zadatka. Za svaka dva učenika postoji točno jedan zadatak koji su obojica riješila, a svaki zadatak je riješilo točno k učenika. Za koje vrijednosti prirodnih brojeva n i k je to moguće?

12. Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje. Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

13. Na brodu je n gusara od kojih svatko drži na ciljniku točno dvojicu drugih gusara. Kad je neki gusar prozvan, onda on (ako je živ) puca u onu dvojicu. Gusari su prozvani nekim redosljedom i na kraju je ubijeno ukupno 28 gusara. Dokaži da bi za svaki drugi redosljed prozivanja ("tko koga cilja" ostaje isto) barem 10 gusara bilo ubijeno.

Hintovi

1. Pokušaj svesti zadatak na brojanje niza nekih znakova.
2. Uoči da valjanost rasporeda ovisi o tome na kojim poljima su neparni brojevi. Zato prvo odaberi polja na kojima će biti neparni brojevi.
3. Kreni od sela na rubu i počni graditi od tamo. Opet pokušaj svesti zadatak na brojanje niza nekih znakova.
4. Koje bi bilo rješenje da nijedna žena ne treba stajati ispred svog muža? Koje bi bilo rješenje da samo najniža žena treba stajati ispred svojeg muža?
5. Koliko puta će se pojaviti broj k?
6. Dvostruko prebrojavanje.
7. Razmisli hoćeš li početi od fiksiranog skupa ili fiksiranog elementa.
8. Rekurzija/indukcija.
9. Dokaži da broj jednakokračnih trokuta kojim nisu svi vrhovi iste boje ne ovisi o rasporedu crvenih točaka. Poveži to s brojem nekih određenih dužina.
10. Koliko ima različitih rasporeda utega? Promotri sve rasporede za neki jednostavan, ali ne pre trivijalan primjer. Promatraj položaj nekog fiksnog utega.
11. Dvostruko prebrojavanje. Broji nekakvu strukturu koja se sastoji od učenika i zadatka.
12. Dvostruko prebrojavanje. Broji nekakvu strukturu koja se sastoji od polja i brida.
13. Pretpostavi suprotno.

Rješenja

1. Prvi slučaj: 8 pomaka desno, 6 gore, 1 dolje. Ukupno $\binom{15}{8}\binom{7}{6}$ načina. Drugi slučaj: 9 pomaka desno, 5 gore, 1 lijevo. Ukupno $\binom{15}{9}\binom{6}{5}$ Ukupno $7\binom{15}{8} + 6\binom{15}{9}$ načina.

2. Prvo odaberemo polja na kojim će biti neparni brojevi, to možemo na 144 načina (dokazat ćemo to) zatim taj broj pomnožimo s $(8!)^2$ rasporedimo neparne, zatim parne brojeve po poljima. Rješenje je $144 \cdot (8!)^2$. Prvo ćemo odabrati dva retka koja će imati 3 neparna broja (6 načina), zatim odaberemo koje polje u gornjem u ta dva retka bude imalo paran broj (4 načina), pa isto to za donji (3 načina, ne smije biti isti stupac kao u gornjem retku). Nakon toga za preostala dva retka odaberemo koje polje će biti neparan broj (2 načina). Ukupno $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ načina.

3. Izvor.

4. Neka je M broj koji tražimo. Zamislimo da imamo zapisanih svih M redoslijeda na papiru. Zatim napišemo sve redoslijede u kojima je prva žena iza svojeg muža. To će biti M novih redoslijeda (po jedan za svaki koji nam je zapisan na početku). Sada imamo $2M$ redoslijeda, a to su svi oni u kojima prva žena ne treba biti ispred svojeg muža, a ostale trebaju. Sada zapišemo sve redoslijede u kojima je druga žena iza svojeg muža, i tako za ostale žene; u svakom koraku broj redoslijeda će se udvostručiti, pa ćemo na kraju dobiti $2^n \cdot M$ zapisanih redosljeda. To će biti svi mogući redovi, a njih ima $(2n)!$. Zato je $M = \frac{(2n)!}{2^n}$.

5. Izvor.

6. Za svaki $i = 1, 2, ..., n$ ima točno $(n-1)!$ permutacija u kojima je i fiksna točka. Kad sve to zbrojimo dobjemo $n!$. Uočimo da smo u toj sumi svaku permutaciju s k fiksnih točaka brojali točno k puta.

7. Za svaki od elementa odaberemo najmanji indeks skupa u kojem se pojavljuje (11 načina za svaki, jedanaesta mogučnost je da se ne pojavi ni u jednom skupu), to će jedinstveno odrediti broj rasporeda. Ukupno 11^100 načina.

8. Drž 2014, 2. razred, 5. zadatak.

9. Drž 2017, 3. razred, 5. zadatak

10. Prvo uočimo da svaku osobu zovemo ili jednom, ili nijednom, is toga slijedi da ima 2^n mogućih rasporeda gdje je n broj imena. Promotrimo proizvoljan uteg U i jedno njegovo ime X. Moguće rasposrede podijelimo u parove, tako da se upareni rasporedi razlikuju samo u tome je li X pozvan ili ne. Za svaki par vrijedi da se u ta dva rasporeda U nalazi na različitim stranama jer ga jedina transformacija koja mijenja jedan raspored iz para u drugi prebacuje na drugu stranu vage. To znači da se uteg X (pa tako i svaki uteg) u polovici svih rasporeda (ukupno $2^(n-1)$ nalazi na lijevoj strani, a u drugoj polovici na desnoj strani. Dakle ako zbrojimo sve lijeve strane (iz svakog rasporeda), dobijemo istu vrijednost kao kad zbrojimo sve desne strane (jer će se svaki uteg pojaviti točno $2^(n-1)$ puta u obje sume). Sada, ako pretpostavimo da je jedna lijeva strana strogo veća, a ostale veće ili jednake od svoje desne strane te ih opet sve zbrojimo, dobijemo da je suma svih lijevih strana strogo veća od sume svih desnih strana (sigurno nije jednaka), to je kontradikcija.

11. Drž 2017, 3. razred, 5. zadatak

12. Drž 2018, 2. razred, 5. zadatak

13. MEMO 2018, ekipno, 3. zadatak