Matematička indukcija

S15 Lakša grupa

Predavanja subotom
sezona 2020./2021.

Lucija Relić

13. ožujka 2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Princip matematičke indukcije koristan je alat kod dokazivanja tvrdnji T_n koje ovise o n za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$. Kod dokazivanja matematičkom indukcijom uz pretpostavku da željena tvrdnja vrijedi za neki proizvoljan prirodan broj k pokazujemo da tada nužno vrijedi tvrdnja i za $k+1$. Ono što nam nedostaje je provjera da za neki prirodan broj tvrdnja stvarno vrijedi (ne pretpostavljamo, nego izravno dokazujemo da vrijedi). Ako tvrdnju pokazujemo za sve prirodne brojeve, tada moramo provjeriti tvrdnju za $n = 1$, a onda pokazati da ako vrijedi za neki k, mora vrijediti i za $k+1$. Budući da smo na početku pokazali da tvrdnja vrijedi za 1, zbog indukcije vrijedi i za $1+1=2$ pa za $2+1=3$, $3+1=4$, itd. dok ne pokrijemo sve prirodne brojeve.

Formalno, matematička indukcija sastavljena je od 3 dijela:

1. **baza** (T_1): pokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$
2. **pretpostavka** (T_k): pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$
3. **korak indukcije** (T_{k+1}): koristeći pretpostavku pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $k+1$

Indukciju možemo vizualizirati dominama, zamislimo da smo ih složili u red i cilj nam je sve ih srušiti jednim potezom. Za početak provjerimo možemo li direktno srušiti prvu pločicu (baza indukcije). Zatim pretpostavimo da se neka domina uspjela srušiti (pretpostavka) i provjerimo izaziva li to rušenje i sljedeće domine u redu (korak indukcije). Ako rušenje proizvoljne domine znači rušenje i sljedeće, po principu matematičke indukcije možemo zaključiti da će se tada srušiti sve domine. Naime, uspješno smo srušili prvu dominu, a budući da rušenje neke domine izaziva rušenje i sljedeće znamo da će se srušiti i druga. Međutim, tada znamo da će se srušiti i treća i tako dalje.

Osim na skupu prirodnih brojeva indukciju možemo koristiti na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima (npr. parni prirodni brojevi, cijeli brojevi, prirodni brojevi veći od 3), a to će nekada dovesti i do modifikacije baze i/ili koraka indukcije. Ponekad nam je potrebno više informacija (pretpostavki) da bismo pokazali korak indukcije pa u drugom koraku indukcije pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za sve $n \leq k$ za neki proizvoljan k prirodan broj.

Primjer. Dokažite da je suma prvih n prirodnih brojeva jednaka $\frac{n(n+1)}{2}$ i to za sve prirodne brojeve n.

Tvrdnju pokazujemo koristeći matematičku indukciju. Označimo sa $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$ sumu prvih n prirodnih brojeva.

baza Provjeravamo $S(1) = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$, što je tvrdnja za $n = 1$. Budući da je $S(1) = 1$ i $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$, lagano vidimo da smo pokazali bazu indukcije.

pret. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$.

korak Želimo koristeći pretpostavku za k pokazati da je

$$S(k+1) = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Raspišemo lijevu stranu:

$$\begin{aligned}S(k+1) &= 1+2+\ldots+k+(k+1)\\ &= S(k)+(k+1)\\ &\overset{pretp.}{=} \frac{k(k+1)}{2}+k+1\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

Time smo pokazali korak indukcije pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja zadatka vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Zagrijavanje

1. Dokažite da je zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva jednak n^2.
2. Dokažite da je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Dokažite da je $n! > 2^n$ za $n \geq 4$.
4. Dokažite da je $3^n > 2^n + 3n$ za sve $n \geq 3$.
5. Dokažite da je $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ djeljiv sa 133 za sve $n \in \mathbb{N}_0$.
6. Koliko je
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}?$$

Zadaci

7. U ravnini je dano n pravaca tako da nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri se ne sijeku u istoj točki. Dokažite da se ti pravci sijeku u ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.
8. U ravnini je nacrtano n kružnica proizvoljnih polumjera i u proizvoljnom međusobnom položaju. Dokažite da se tako dobivena karta može obojati dvjema bojama tako da se svaka dva susjedna područja obojana različitim bojama.
9. Dokažite indukcijom da je broj dijagonala konveksnog n-terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$.
10. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn ili više.
11. Dokažite da se, za proizvoljan prirodni broj n, bilo koja $2^n \times 2^n$ šahovska ploča s uklonjenim jednim poljem može popločati koristeći samo tromine oblika slova L s jednakim krakovima (dakle kao 2×2 kvadrat, samo bez jednog vrha).
12. Zadan je niz brojeva (a_n) takav da je $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ i $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ za svaki prirodni broj $n \geq 2$. Dokaži da su svi članovi niza (a_n) kvadrati prirodnih brojeva.
13. Dokažite da se za svaki $n \geq 6$ kvadrat može razrezati na n manjih kvadrata.
14. *Hanojski tornjevi* se sastoje od tri tornja, gdje se na prvom nalazi n diskova naslaganih jedan na drugi po veličini tako da je na dnu najveći, a na vrhu najmanji disk. Cilj je prebaciti diskove s prvog na treći toranj tako da u svakom potezu pomičemo *samo jedan* disk te da ni u jednom trenutku ne smijemo staviti veći disk na manji (dakle, na kraju završavamo s identičnim poretkom diskova kao na početku). Dokaži da se to može ostvariti u $2^n - 1$ poteza.
15. Neka je $x \in \mathbb{R}$ realan broj takav da vrijedi $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Dokaži da tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

16. Nizovi (x_n) i (y_n) zadani su rekurzivno:
$$x_1 = 3, y_1 = 1$$
$$x_{n+1} = 3x_n + y_n, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}$$
$$y_{n+1} = x_n + 3y_n, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}$$
Dokaži da je $x_{2017}^2 - y_{2017}^2 = 8^{2017}$.

17. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a > b$. Dokažite da za sve prirodne brojeve $n > 1$ vrijedi
$$a^n - b^n > n \cdot (a - b) \cdot b^{n-1}.$$

18. Niz je zadan sa $a_1 = 2$, $a_n = 2(n + a_{n-1})$. Dokažite da je $a_n < 2^{n+2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

19. Na teniskom turniru sudjelovalo je 2^n igrača, gdje je n prirodan broj. Svaki je igrač odigrao po jedan meč sa svakim od preostalih igrača. Dokaži da možemo odabrati $n + 1$ igrača i poredati ih u niz, tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.

20. Je li moguće poredati brojeve $1, 2, \ldots, 2020^{2020}$ u niz tako da se prosjek bilo koja dva broja iz tog niza ne nalazi između njih?

Hintovi:

1. klasična indukcija
2. klasična indukcija
3. klasična indukcija
4. klasična indukcija
5. Pretpostavka indukcije je da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$ za $k \in \mathbb{Z}$.
6. Rješenje koje se može naslutiti na malim primjerima može se pokazati indukcijom.
7. U koraku (za $n+1$) promatrajte n pravaca i s koliko sjecišta doprinese taj zadnji dodani pravac.
8. U koraku (za $n+1$) promatrajte n kružnica i što se desi kad dodamo tu zadnju kružnicu.
9. S koliko dijagonala doprinosi vrh koji je u odnosu na pretpostavku dodan u koraku?
10. Izbor markica može sadržavati barem jednu vrijednosti 5 kn ili mogu sve biti vrijednosti 3 kn.
11. Ploča $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ sastoji se od 4 ploče $2^n \times 2^n$. Kako možete popločati sredinu velike ploče?
12. Naslutite kako izgleda opći član niza.
13. indukcija s korakom 3
14. klasična indukcija
15. Koristite jače pretpostavke u drugom koraku indukcije.
16. Dokažite $x_n^2 - y_n^2 = 8^{2017}$.
17. klasična indukcija
18. Možete li pogoditi opću formulu?
19. Promotrimo igrača s najviše pobjeda. Njega želimo staviti na čelo kolone.
20. Napravite korake iz n u $2n$ pa iz n u $n-1$.

Rješenja:

1. Problem 1.b)
2. Problem 2.a)
3. Problem 5.
4. MNM online predavanje, primjer 4
5. Za $n = 0$ imamo $11^{0+2} + 12^{2\cdot 0+1} = 133$ pa smo provjerili bazu indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $11^{n+2} + 12^{2\cdot n+1} = 133k$ za $k \in \mathbb{Z}$.
Raspišimo izraz iz zadatka za $n+1$ i iskoristimo pretpostavku indukcije:
$$\begin{aligned} 11^{n+1+2} + 12^{2n+2+1} &= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+2} + (133 + 11) \cdot 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot (11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot 133 \cdot k + 133 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 133 \cdot (11k + 12^{2n+1}) \end{aligned}$$
Time smo pokazali i korak indukcije pa tvrdnja vrijedi po principu matematičke indukcije.
6. Ako raspišemo traženi zbroj $S(n)$ za prvih nekoliko $n \in \mathbb{N}$ vidimo da bi trebalo vrijediti $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Bazu smo već provjerili raspisujući male primjere. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Sada imamo
$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= S(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$
pa smo pokazali korak indukcije, tj. indukcijom smo pokazali da je traženi zbroj jednak $\frac{n}{n+1}$ za svaki prirodni broj n.
7. Za bazu uzmimo $n = 1$, jedan pravac sam sa sobom siječe se u 0 točaka pa smo provjerili bazu.
Pretpostavimo da za neki proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da se n pravaca u općem položaju sijeku u $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka. Sada promatramo broj sjecišta $(n+1)$ pravaca u općem položaju. Izdvojimo jedan od njih; preostalih n po pretpostavci indukcije ima $\frac{n(n-1)}{2}$ sjecišta. Izdvojeni pravac siječe svaki od preostalih n točno jednom (ne postoje 2 paralelna pravca niti 3 koja se sijeku u istoj točki), čime doprinosi broju sjecišta sa n. Zato je ukupan broj sjecišta $(n+1)$ pravaca jednak
$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$
čime smo pokazali i korak indukcije pa tvrdnja zadatka vrijedi po principu matematičke indukcije.
8. Elementarna matematika 1, materijali za vježbe, zadatak 7
9. MNM online predavanje, zadatak 6
10. MNM online predavanje, zadatak 9.
11. Lako vidimo da ploču 2×2 možemo popločati jednom pločicom koje god polje bilo uklonjeno. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ možemo šahovsku ploču $2^n \times 2^n$ s uklonjenim bilo kojim poljem popločati trominama. Promatramo ploču veličine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ s uklonjenim nekim poljem. Ona je sastavljena od 4 ploče veličine $2^n \times 2^n$, a uklonjeno polje nalazi se u nekoj od tih četvrtina. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se uklonjeno polje nalazi u gornjoj lijevoj četvrtini, pa tada tu četvrtinu po pretpostavci indukcije možemo popločati trominama. Promotrimo sada 4 polja koja se nalaze točno u sredini velike ploče. Jedno od njih

(gornje lijevo) već smo popločali, pa na preostala 3 možemo pravilno postaviti jednu trominu. Međutim, ta tromina nalazi se u svakoj od preostalih četvrtina ploče (točno s jednim poljem), pa i te četvrtine sada možemo promatrati kao ploče $2^n \times 2^n$ s uklonjenim jednim poljem, a to po pretpostavci znamo popločati trominama. Tako smo popločali cijelu veliku ploču (osim naravno onog jednom uklonjenog polja) pa smo pokazali i korak indukcije.

12. Općinsko 2020. 4A, 2.

13. Članak iz Poučka, zadatak 10.

14. Problem 35.

15. Problem solving strategies, The induction principle, 15. zadatak

16. Općinsko 2017. 4A, 2.

17. Zadatak 3.

18. Promotrimo razliku $2^{n+2} - a_n$. Uvrštavanjem malih $n \in \mathbb{N}$ naslućujemo da bi trebalo vrijediti $2^{n+2} - a_n = 2(n+2)$. Za bazu uzmimo $n = 1$, tada vididmo da vrijedi $2^{1+2} - 2 = 6 = 2 \cdot (1+2)$ pa smo provjerili bazu. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^{n+2} - a_n = 2(n+2)$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1+2} - a_{n+1} &= 2 \cdot 2^{n+2} - 2(n+1) - 2a_n \\ &= 2 \cdot (2^{n+2} - a_n) - 2n - 2 \\ &= 2 \cdot 2(n+2) - 2n - 2 = 4n - 8 - 2n - 2 \\ &= 2(n+1+2) \end{aligned}$$

što pokazuje i korak indukcije. Budući da smo indukcijom pokazali da vrijedi $2^{n+2} - a_n = 2(n+2)$, a $2(n+2) > 0$, zaključujemo da vrijedi tvrdnja zadatka.

19. Županijsko 2012. 4A, 5.

20. Moguće je! Lako provjerimo da je za 4 to moguće, pa indukcijom pokažemo da možemo prijeći iz n u $2n$ i to tako da prvih n brojeva budu neparni, a zadnjih n parni i posloženi analogno rješenju za n. Tada te polovice nemaju konflikte (transformacijama $k \mapsto 2k$ i $k \mapsto 2k+1$ ne kvarimo uvjet prosjeka), a zbroj dva broja iz različitih polovica je neparan pa se njihov prosjek ne nalazi u nizu. Sada možemo napraviti konstrukciju za sve 2^n, a čim to preraste 2020^{2020} posložimo te brojeve (za 2^n, gdje je n dovoljno velik) te izbacimo one veće od 2020^{2020} i tako dobivamo dobar raspored.