

Uvod

Na meniju su razni teži zadaci iz teorije brojeva raznih okusa i vrsta.

Zadaci

1. Neka su $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ polinomi takvi da je P monički te da za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$P(n)^n \mid Q(n)^{n+1}$$

Dokaži da za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$P(n) \mid Q(n)$$

2. Neka je n prirodan broj, $P \in \mathbb{Z}[x]$ nekonstantan polinom te $(a_n)_{n \geq 0}$ niz zadan sa $a_0 = n$ i $a_{k+1} = P(a_k)$. Ako niz $(a_n)_{n \geq 0}$ za svaki $b \in \mathbb{N}$ sadrži neku pravu b -tu potenciju, dokaži da je P stupnja 1.

3. Odredi sve $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da $f^n(n) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i vrijedi

$$|f(mn) - f(m)f(n)| < \pi^{21}$$

za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

4. Nađi sve proste brojeve p takve da postoji točno jedan $a \in \{1, \dots, p\}$ takav da

$$p \mid a^3 - 3a + 1$$

5. Neka je p prost broj i n prirodan broj takav da $p \mid n^7 - 1$. Ako su $n+1, n^2+1$ kvadratni ostatci modulo p , dokaži da je i n^3+1 kvadratni ostatak modulo p .

6. Nađi sve parove (p, q) prostih brojeva takvih da je $p > q$ i

$$\frac{(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q}-1}{(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1}$$

je cijeli broj.

7. Neka je n prirodan broj. Dokaži da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da jednačba

$$\varphi(x) = m$$

ima barem n rješenja.

8. Kažemo da je niz prirodnih brojeva Fibonaccijevog tipa ako zadovoljava

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$

za sve prirodne k .

Može li se $\mathbb{N}$ particionirati u beskonačno mnogo nizova Fibonaccijevog tipa?

Hintovi:

1. Kako se ponašaju $v_p(P(n)), v_p(Q(n))$?
2. Promatraj razlike uzastopnih članova.
3. Dokaži da je funkcija multiplikativna koristeći neomeđenost i drugi uvjet, uvođenjem treće varijable. Zatim dovrši.
4. Koje su nultočke u $\mathbb{R}$ (Cardanova formula)? $2\cos(2t) = 2\cos(t)^2 - 2$. Pomaže li nam ovo u $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
5. Što je umnožak $(n+1)(n^2+1)(n^3+1)$?
6. Promatraj ordere s obzirom na proste djelitelje nazivnika.
7. Dirichletov/Prime number teorem.
8. Može. $\lfloor n\phi \rfloor$ i $\lfloor n\phi^2 \rfloor$ particionira $\mathbb{N}$ - izgradi niz od toga.

Rješenja:

1. [AoPS](#)
2. [ARO 2019](#)
3. [AoPS](#)
4. [IMC 2020 P6](#)
5. [Poljska 2019](#)
6. [IMO SL 2017 N5](#)
7. [USA TSTST 2015](#)
8. [USA TSTST 2017](#)