



Predavanja subotom
sezona 2021./2022.

Invarijante

Andrija Tomorad

16.10.2021.



Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

matematicari.mnm

Uvod

Dobrodošli i sretno vam bilo u novoj nastavnoj, pa tako i natjecateljskoj godini! Nakon uvodnog predavanja nastavljamo s kombinatorikom, i to manje standardnom temom od kombinatorike prebrojavanja - invarijantama. Na ovom predavanju će većina zadataka biti "Može li se ponavljanjem opisanog poteza iz zadanog početnog stanja postići opisano konačno stanje?" Spoiler alert, odgovor je uglavnom ne. Problem u tim zadacima jest što ima previše mogućih nizova poteza da promatramo svakog posebno i tako dokažemo da nije moguće (kao što bismo primjerom dokazivali da jest moguće), stoga se fokusiramo na samo jedno "svojstvo". INVARIJANTA - ono što se ne mijenja povlačenjem poteza (potezi mogu biti zadane računske operacije, postavljanje zadanih oblika na ploču, zadano kretanje po koordinatnoj mreži... vidjet ćete u zadacima)... Valja napomenuti da nisu svi zadatci "tradicionalni na tu temu". Većina zadataka će biti "Dokaži da se ne može...", i fokusirat će se na jedno svojstvo, ali ne će riječ "invarijanta" biti ključna u formalizaciji rješenja, pogotovo u usporedbi s uvodnim zadacima. Još jedna tema ovog predavanja je "bojanje", to je uglavnom korak prije invarijanti. Često se odnosi na zadatke s pločom, obojamo polja ploče na određeni način, npr. šahovski, kako bismo si pomogli s konstrukcijom invarijanti.

Evo za početak dva uvodna zadatka:

1. uvodni - Na ploči su zapisani brojevi 41, 3, 22, 29, 15. Potez se sastoji od odabira tri broja x, y, z koja mijenjamo s $2x - y$, $2y - z$ i $2z - x$. Možemo li u konačno mnogo poteza dobiti sljedeće brojeve (ne nužno tim redoslijedom)?

a) 17, 12, 42, 9, 30

b) 23, 50, 7, 17, 15

2. uvodni - Možemo li 10×10 ploču opločiti 1×4 pločicama?

Lakši zadaci

1. Svakom vrhu kocke je pridružen prirodan broj. Na početku vrhovi A i C imaju 1, a ostali 0. U potezu odaberemo jedan brid i povećavamo brojeve na njegovim vrhovima za 1. Možemo li postići da svi brojevi budu jednaki?
2. Zadan je skup $\{2, 3, 4\}$. U jednom potezu biramo dva broja a, b i mijenjamo ih s $0.6a + 0.8b$, $0.8a - 0.6b$. Možemo li doći do skupa $\{1, 3, 5\}$?
3. Ploča 8×8 je obojana šahovski. U potezu možemo odabrati redak ili stupac te promijeniti boju svakom polju. Je li moguće postići da točno jedno polje bude bijelo?
4. Zraka svjetlosti dolazi u veliku mračnu sobu kroz malu rupu u jugozapadnom kutu pod kutem od 45 stupnjeva. Soba je duga 49 m u smjeru sjever-jug i 78 m u smjeru istok-zapad. Zraka se normalno odbija od svakog zida. U koji će kut dospjeti zraka?
5. Na školskoj ploči zapisani su svi prirodni brojevi manji ili jednaki n . U potezu brišemo dva broja (a, b) i biramo proizvoljni k te pišemo $(a + k, b + k)$. Za koje n možemo postići da svi brojevi na ploči budu jednaki?
6. Na otoku živi p plavih, c crvenih i z zelenih kameleona. Kad se dva kameleona različitih boja susretnu, oni mijenjaju boju u onu treću. Za kakve p, c, z se može dogoditi da svi kameleoni budu istobojni?
7. Ukруг je napisano 299 nula i jedna jedinica. U potezu možemo ili svakom broju istovremeno oduzeti njemu oba susjedna broja ili odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1. Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukруг budu napisane dvije uzastopne jedinice i 298 nula? A tri uzastopne jedinice i 297 nula?

8. Ploča 6×6 je opločena dominima 2×1 . Dokaži da postoji pravac koji prolazi pločom kroz granice među poljima takav da ne siječe ni jednu domino pločicu.

Teži zadaci

9. Na ploči je zapisan broj 2021^{2022} . Tom broju brišemo prvu znamenku i pribrojimo ju onom što ostane. Postupak ponavljamo dok ne dobimo 10-znamenkasti broj. Dokaži da su neke dvije znamenke u tom broju iste.
10. U kvadratnoj mreži se nalazi 9 žetona smještenih u 3×3 kvadrat. U potezu je dozvoljeno jednim žetonom x "preskočiti" njemu susjedni žeton y , te maknuti žeton y s ploče i nikad ga više ne vratiti. Možemo li postići da ostane samo 1 žeton?
11. Imamo $m \times n$ zemljište na kojem je K polja obraslo u korov (na početku). Svako polje koje ima dva susjeda (koji dijele stranicu) obrasla u korov će i samo obrasti u korov sljedeće godine. Odredi najveći K tako da smo sigurni da ne će cijelo zemljište obrasti u korov.
12. U nekom gradu ima M ulica i N trgova i vrijedi $M > N$. Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi nijednim drugim trgom. Ove godine građani su odlučili obojati svaku ulicu ili u crveno ili u plavo. Nakon toga će svake sljedeće godine odabrati trg i promijeniti boju svim ulicama. Dokaži da je moguće (na početku) obojati ulice tako da bude nemoguće u budućnosti postići da sve ulice budu istobojne.
13. *Plus* je pločica koja pokriva jedno polje i sve njegove susjede. *Minus* je pločica koja pokriva pet uzastopnih polja u istom retku/stupcu. Nakon što ploči 2016×2017 uklonimo dva polja u zadnjem stupcu, možemo li ju opločiti plusevima i minusevima?
14. Mike i Sully igraju igru sa šahovskom pločom i figurom skakača. Prvo Mike postavi skakača na bilo koje polje, zatim Sully ga pomakne kako se skakač inače kreće u šahu. Dalje igraju naizmjenice, svatko može pomaknuti skakača kako se inače kreće u šahu, ali ne na polje na kojem je skakač već bio. Igrač koji ne može odigrati potez gubi. Koji igrač može pobijediti neovisno o igri protivnika?
15. Stepenice reda k su pločica koja pokriva dijagonalu $k \times k$ kvadrata i sva polja kvadrata s jedne strane dijagonale. Ploči 2018×2018 smo uklonili dva polja u istom retku. Možemo li ju opločiti stepenicama reda 3 i stepenicama reda 4?

Hintovi

1. bojanje
2. Tražimo neki izraz $f(x, y, z)$ koji bi bio invarijanta. Na što te asociraju brojevi 0.6 i 0.8?
3. parnost
4. Smjesti zadatak u koordinatni sustav. Što je zajedničko svim točkama kojim zraka prolazi?
5. Promotri male primjere da otkriješ za koje se može, a za koje ne. Invarijanta će biti intuitivna.
6. Počni od kraja zadatka. Ako znaš da su svi postali istobojni, što je tom moglo prethoditi.
7. Za 298 nula je jednostavno. Za 297 promatraj alternirajuću sumu.
8. Što ako neki pravac siječe točno 1 domino?
9. Na što te asocira zbroj znamenaka u elementarnoj teoriji brojeva? Možda djeljivost s nekim brojem...
10. Oboji ploču. Ako pažljivo razmisliš o tome što se događa u potezu, ideja bi trebala biti relativno intuitivna.
11. Na koje sve načine se korov može širiti (ima nekoliko mogućih rasporeda susjednih polja kod širenja korova). Promatraj to kao poteze koji bi trebali očuvati neku invarijantu (iako ovdje neće biti invarijanta po definiciji)
12. Ovdje će biti potrebno malo znanja iz teorije grafova. Ako ne znate, provjerite pojmove stablo i ciklus te neke leme o njima. Za samu ideju rješenja, hint su prvi i peti zadatak
13. Trebat će obojati ploču u 5 boja (motivacija dolazi iz oblika pločica), ali trebat će nešto više od brojenja pokrivenih polja za svaku boju.
14. Pokušaj isto s nekom drugom šahovskom figurom npr. topom ili kraljem.
15. Naravno da ne možemo. Za bojanje je prvi hint to što na početku uklanjamo dva polja u istom retku, a drugi da broj svih polja na ploči (bez ona 2) nije djeljiv s 4.

Rješenja

1. uvodni - zbroj i broj parnih brojeva su invarijante
2. uvodni - podijelimo ploču na dvadeset pet 2×2 kvadrata i tako dobivenu 5×5 ploču obojimo šahovski.
 1. Ne. Obojimo A,C,F i H u crno, ostale bijelo. Razlika zbroja crnih i zbroja bijelih je invarijanta.
 2. Ne. Zbroj kvadrata je invarijanta.
 3. Ne. Parnost broja bijelih polja je invarijanta (promijene u potezu mogu biti $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$).
 4. U jugoistočnom kutu. Smjestimo li sobu u prvi kvadrant koordinatnog sustava (jugozapadni kut u ishodište), parnost zbroja koordinata je invarijanta.
 5. Nije moguće za $4k + 2$ jer je parnost zbroja svih brojeva invarijanta. Za $n = 4k$ ili $n = 4k + 3$ možemo upariti brojeve 1 i $\frac{n}{2} + 1$, 2 i $\frac{n}{2} + 2$, i sve do $(\frac{n}{2} - 1, n - 1)$, zatim svaki par povećati do $(\frac{n}{2}, n)$, zatim podijelimo prvih $\frac{n}{2}$ u parove i povećamo ih do n . Za $n = 4k + 1$ je isto kao za $n = 4k$, samo ih još u parovima povećamo za 1 kad dobijemo n n -ova i jedan $n + 1$ da svi na kraju budu $n + 1$.
 6. Nije moguće ako svi brojevi daju isti ostatak pri dijeljenju s tri. Lako je pokazati da će nakon svakog mogućeg susreta opet davati različite ostatke pri djeljenu s tri. Ako postoje neka dva koja daju isti ostatak pri djeljenu s tri (bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $c = p + 3k$), onda susrećemo crvene i zelene. Razlika crvenih i plavih će se smanjivati za 3 i nakon nekoliko poteza će biti jednaki. Ako nam u međuvremenu ponestane zelenih, onda susretnemo crvenog i plavog (i dalje daju isti ostatak pri djeljenu s 3). Kad postignemo jednakost crvenih i plavih, samo ih susrećemo u parovima (P, C) dok svi ne budu zeleni.
7. Državno 2019., 2.razred
8. Pretpostavimo da neki od tih pravaca siječe točno 1 domino. Dobit ćemo kontradikciju jer taj pravac onda dijeli ploču na dva dijela s neparnim brojem polja (parnost broja opločenih polja je invarijanta za oba dijela jer nam više nije dozvoljeno presjeći pravac što je jedini način za ne opločiti dva polja na istom dijelu). Sada znamo da imamo ukupno 18 domina, 10 pravaca, a svaki pravac siječe 0 ili barem 2 domina. Ako svi sijeku barem dva, trebalo bi biti barem 20 domina ukupno, zato barem jedan ne siječe niti jedan domino.
9. Invarijanta je ostatak pri dijeljenju s 9 jer se u svakom koraku broj smanji za $a \cdot (10^k - 1)$, a taj broj je djeljiv s 9 . Početni broj nije djeljiv s 9 , a 10 -znamenasti broj kojem su sve znamenke različite jest.
10. Obojimo ploču u 3 boje ponavljajući uzorak (pattern) A, B, C prema desno i prema dolje. Tako dobijemo da u svakom potezu premjestimo žeton s jedne boje na drugu i uzimamo žeton na trećoj boji. Promjene broja žetona na bojama su $-1, +1, -1$, dakle svi mijenjaju parnost. Na početku su brojevi žetona na svim bojama jednaki, a nakon svakog poteza svi mijenjaju parnost. Uvijek će se dogoditi da su ili svi parni ili svi neparni, ali to ne vrijedi za slučaj koji želimo postići $(1, 0, 0)$.
11. Opseg dijela zemljišta obraslog u korov se ili ne mijenja ili se smanji (provjerite sve moguće načine širenja). Na početku je opseg najviše $4k$, a na kraju treba biti strogo manji od $2(m + n)$, zato je $K < \frac{m+n}{2}$. Ako je $2K = m + n$, onda je moguće da cijelo zemljište obraste u korov, evo primjera uz pretp. da je $m \geq n$: $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n), (n + 2, n), (n + 4, n), \dots, (m, n)$
12. Državno 2017., 2.razred
13. Državno 2016., 2. i 3. razred
14. Ideja je obojati ploču u 32 boje, 2 polja svake boje tako da se iz svakog polja može u polje iste boje. Tako će Sully imati spreman odgovor na svaki Mikeov potez - pomaknuti skakača u drugo polje iste boje. Valja se i prisjetiti šahovskog bojanja (jedan će uvijek micati s crnog na bijelo, a drugi obratno) što znači da se za svaku boju zna na koje polje Mike skače, a na koje Sully. Ostaje još samo pokazati da je takvo bojanje moguće. Lako uočavamo da je moguće za 2×4 pravokutnik, pa je moguće i za 8×8 ploču jer se može podijeliti a 2×4 pravokutnike
15. Broj polja ploče (bez ona dva) je djeljiv s 2 , a nije djeljiv sa 4 . Broj polja obaju stepenica je također djeljiv s 2 , ali ne sa 4 . To nam daje da broj poteza treba biti neparan (jer nakon parnog broja poteza broj opločenih polja će biti djeljiv s 4). Sada obojamo ploču tako da su prvi i drugi redak crni, treći i četvrti bijeli, peti i šesti

crni, itd. Uočimo da svim stepenicama pokrivamo neparno mnogo crnih i neparno mnogo bijelih polja. To nam daje da broj poteza treba biti paran jer ima parno mnogo crnih i parno mnogo bijelih polja. Tu dolazimo do kontradikcije.