

Predavanja subotom
sezona 2021./2022.

mnm.hr

Princip bijekcije

Matko Šimić

16.10.2021.



Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"



Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"



matematicari.mnm

Uvod

injekcija - za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je **injekcija** ako vrijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

dakle kod injektivne funkcije različiti elementi domene se preslikavaju u različite elemente kodomene (*obrat po kontrapoziciji*).

surjekcija - za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je **surjekcija** ako vrijedi

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$$

odnosno ako je slika funkcije jednaka domeni funkcije.

bijekcija - za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je **bijekcija** ili **1-1** ako je ona injekcija i surjekcija tj.

$$(\forall y \in B)(\exists! x \in A)(y = f(x))$$

onda i samo onda za nju postoji inverzna funkcija f^{-1} .

Postavlja se pitanje "zašto nam je bijekcija značajna u kombinatorici", a najkraći odgovor bio bi **kardinalitet** skupa.

ekvipotentni skupovi - za skupove A i B kažemo da su **ekvipotentni** ili **jednakobrojni** ako postoji bijekcija $f : A \rightarrow B$. Tada još kažemo da A i B imaju jednak kardinalni broj.

Nekad može biti teško prebrojati rješenja nekog problema pa je lakše pronaći novi problem, prebrojati njegova rješenja i pokazati da je taj broj jednak (uspostavljajući bijekciju).

Primjer 1. Koliko postoji podskupova skupa s n elemenata?

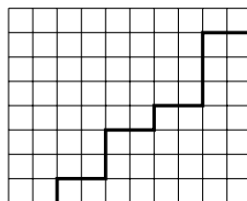
Primjer 2. Dokaži identitet $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Još neki identiteti koji se na prvu čine neprimjenjivi, ali ćemo ih objasniti kombinatornim argumentom su

a) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

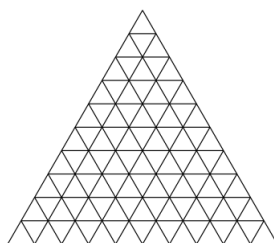
Zadaci

1. U Kartezijevom koordinatnom sustavu odredite broj puteva iz točke $(0,0)$ u točku (m,n) ; $m, n > 0$, ako su jedini dozvoljeni koraci jedinični korak u desno i jedinični korak prema gore.

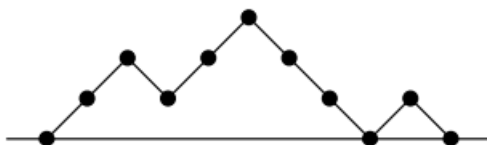


2. Na koliko načina možemo 15 identičnih jabuka podijeliti na 4 učenika?

3. Neka je n prirodan broj. Pokažite da je broj particija broja n jednak broju particija broja $2n$ sa tačno n elemenata.
4. Pokaži da je u n -članom skupu ukupan broj svih fiksnih točaka u svim permutacijama jednak $n!$.
5. Kažemo da je binarno stablo *rastuće* ako je svaki čvor stabla manji od svoje djece. Pokaži da je broj rastućih stabala s n čvorova jednak $n!$.
6. Pokaži da je za prirodan broj $n > 0$ broj podskupova n -članog skupa s parnim i neparnim brojem elemenata jednak.
7. Neka su n i k pozitivni prirodni brojevi. Dokažite da je broj particija od n sa tačno k elemenata jednak broju particija kojima je najveći element tačno veličine k .
8. Konstruiramo trokutastu mrežu slažući n^2 jednakostraničnih trokuta stranice duljine 1 u jednakostraničan trokut stranice duljine n . Koliko je paralelograma omeđeno linijama trokutaste mreže?



9. Neka je *Andrijin* n -put mreža sastavljena od n koraka "gore-desno" $(1, 1)$ i n koraka "dolje-desno" $(1, -1)$ takav da mu je početak u $(0, 0)$ te nikad ne prolazi "ispod" x -osi. Neka je *spust* svaki maksimalan broj uzastopnih koraka "dolje-desno" koji dotiče x -os. Na primjer *Andrijin* 5-put na slici ima dva *spusta*, onaj duljine 3 i onaj duljine 1.



Pokaži da postoji bijekcija između *Andrijin*ih n -puteva duljine n koji nemaju *spust* parne duljine i proizvoljnih *Andrijin*ih n -puteva duljine $n - 1$.

10. Neka je a_n binaran niz duljine n koji ne sadrži tri uzastopna elementa oblika 0,1,0. Neka je b_n binaran niz duljine n koji ne sadrži četiri uzastopna elementa oblika 0,0,1,1 niti oblika 1,1,0,0. Dokaži da je broj nizova $b_{(n+1)} = 2a_n$.

Rješenja

1. [Bijections, problem 1](#)
2. [IMOMath: Counting using bijections](#)
3. [Bijections, practice problems 4](#)
4. [Bijective proof problems 44](#)
5. [Bijective proof problems 133](#)
6. Svaki n -člani skup možemo identificirati sa skupom $\{1, 2, \dots, n\}$ pa ćemo radi jednostavnosti dokaza u nastavku tako i činiti. Označimo sa $\mathcal{A}$ skup svih podskupova parnog kardinaliteta te sa $\mathcal{B}$ skup svih podskupova neparnog kardinaliteta. Fiksirajmo neki $B \in \mathcal{P}(x)$ te definirajmo $f_B : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$ kao $f_B(A) = A \triangle B$. Promatrajmo $B = \{n\}$. Promatrajmo $f_{\{n\}}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ i $f_{\{n\}}|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Funkcija f je bijekcija na konačnom skupu. Posebno je i injekcija stoga je $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$ (promatrajući restrikciju na $\mathcal{A}$) te $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|$ (promatrajući restrikciju na $\mathcal{B}$). Iz ove dvije nejednakosti slijedi da je $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.
7. [Bijections, problem 2](#)
8. [Bijections, problem 4](#)
9. [Putnam 2003. A5](#)
10. [USAMO 1996. problem 4](#)