

Uvod

0.1 Najosnovniji pojmovi:

Dva igrača A i B igraju sekvencijalnu igru koja ne može završiti bez pobjednika. Promotrimo poziciju u kojoj se A nalazi. Kažemo da je pozicija pobjednička ako igrač A iz nje može povući potez koji će mu garantirati pobjedu u igri. Za poziciju kažemo da je gubitnička pozicija ako, koji god potez odigrao, igrač B će u konačnici pobijediti. Ti pojmovi se odnose na igrača koji vuče potez (izlazi) iz zadane pozicije, a ne na onoga koji ulazi u nju. Kažemo da igrač A ima pobjedničku strategiju ako postoji niz poteza koji mu daje pobjedu neovisno o igri igrača B. Ako igrač A nema pobjedničku strategiju, kažemo da B ima negubitničku strategiju.

0.2 Korisni pristupi za zadatke iz teorije igara:

Indukcija - dokazujemo da je $f(A)$ gubitnička pozicija ako je A gubitnička pozicija i zaključujemo nešto principom indukcije.

Simetrija - pronalazimo da za svaki potez igrača A postoji strategija igrača B da uvijek nalazi odgovor i tako ima negubitničku strategiju.

Invarijante i monovarijante - za neku strategiju promatramo način promjene ključnog parametra, te njegovu vrijednost na kraju i na početnoj poziciji, i pomoću toga dokazujemo da je pobjednička.

Strategy-stealing - ako u nekoj igri X igrač ima pobjedničku strategiju, a u igri Y igrač B može doći u poziciju ekvivalentu početnoj u igri X, igrač B ima pobjedničku strategiju u Y

0.3 Još nekoliko savjeta:

Uvijek razmislite može li se definicija pozicije ili uvjet pobjede svesti na nešto praktičnije.

Uglavnom je na početku zadatka dobro pokušati pametno odabrati superpoziciju ili male primjere. Izbjegavajte počinjati s promatranjem potpuno *random* strategije ili pozicije. Iz malih primjera se gotovo uvijek može izvući nešto korisno, ali budite oprezni s vremenom.

Ako igra nema veze s formuliranjem P i G pozicijan, ne znači da nema smisla razmotriti kako će se završnica odigrati.

Zagrijavanje/lakši zadaci

1. Vlatka i Vlatko igraju igru s pravokutnom pločom dimenzija $a \times b$ cm² i žetonima koji su međusobno istog radijusa r . U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču da se ne preklapa s ostalima. Žeton ne treba nužno cijelom površinom biti unutar ploče. Ako Vlatka igra prva, tko ima pobjedničku strategiju?
2. *Dvostruki šah* je igra istih pravila kao šah, samo što igrači naizmjenice vuku dva poteza. Dokaži da bijeli (koji igra prvi) ima negubitničku strategiju.
3. Mike i Sully igraju igru u kojoj naizmjenice povlače poteze. U gornjem lijevom polju $n \times n$ ploče se nalazi bijela kraljica koju pomiče Mike u svojem potezu, a u gornjem desnom polju se nalazi crna kraljica koju pomiče Sully. Mike igra prvi. Na ostalim poljima ploče su sivi pijuni. U potezu je obavezno pomaknuti svoju figuru na zauzeto polje i uzeti figuru koja se tamo nalazi. Igrač kojem protivnik uzme figuru ili ostane bez poteza izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju ovisno o n ?

4. Marin Varivoda i Marin Getaldić igraju igru. Prvo Varivoda postavi 50 figura kraljeva na 100×100 ploču na bilo koja polja, zatim Getaldić postavi topa (kulu) na bilo koje polje. Nakon toga Varivoda u svakom svom potezu može pomaknuti točno dva kralja za jedno polje u bilo kojem smjeru (može i dijagonalno), a Getaldić može pomaknuti topa za bilo koji prirodan broj polja horizontalno ili vertikalno, ali ne na polje na kojem se kralj nalazi niti preko njega. Igra završava kad Varivoda zarobi Getaldićevog topa i tada Varivoda pobjeđuje. Ima li Getaldić negubitničku strategiju?
5. Robert i Jimmy igraju igru sa šahovskom 8×8 pločom i figurom skakača. Naizmjenice povlače sljedeće poteze. Prvo Robert postavi skakača na bilo koje polje, nakon toga ga svaki igrač (prvo Jimmy) pomakne kako se inače kreće u šahu, ali ne na polje na kojem je već bio. Igrač koji ne može napraviti potez, izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju?

Umjereni zadaci

6. Dva igrača naizmjenice povlače poteze u sljedećoj igri. Na ploči su zapisani neki prirodni brojevi, te je u svakom potezu dozvoljeno obrisati dva relativno prosta broja i zapisati njihov zbroj. Tko ne može povući potez, izgubio je. Dokaži da drugi igrač pobjeđuje ako je na ploči na početku zapisano a) 2019 jedinica b) 2020 jedinica?
7. *Chomp* je igra s pločom $m \times n$ čokolade za dva igrača. U potezu je dozvoljeno odabrati jednu "kockicu" i odlomiti sve što se nalazi dolje ili desno u odnosu na odabranu. Tj. ako je "kockica" u gornjem lijevom kutu $(1, 1)$, u donjem desnom (m, n) , a odabrana "kockica" (k, l) . Preostati će samo one (i, j) t.d. je $i < k$ ili $j < l$. Dva igrača su optimalno igrala točno jednom svaki *Chomp* u kojem su m i n prirodni i ne veći od 10. Koliko je puta pobijedio prvi igrač?
8. Roger i David igraju sljedeću igru. Pred njima su tri kutije u kojima je redom 100, 101, i 102 novčića. Roger igra prvi. U potezu je dozvoljeno uzeti točno jedan novčić iz jedne kutije ali ne iz one iz koje je suparnik u prošlom potezu uzimao. Tko ima pobjedničku strategiju?
9. Vlatka i Daniel igraju igru. Prvo Vlatka zapiše prirodan broj n na ploču, zatim naizmjenice povlače sljedeće poteze. Daniel briše Vlatkin broj n i piše $m = n - a^2$ uz uvjet da nije negativan i da je a prirodan, a Vlatka briše Danielov broj m i piše $n = m^k$, k prirodan. Daniel pobjeđuje ako zapiše nulu. Može li Vlatka spriječiti Danielovu pobjedu?
10. Woody i Buzz igraju sljedeću igru. Na stolu je $N > 1$ karata. U prvom potezu Woody uzme barem jednu, ali ne sve karte sa stola. Nakon toga igraju naizmjenice (prvo Buzz) i svaki igrač može uzeti barem jednu, ali ne više od $2m$ pri čemu je m broj karti koje je njegov suparnik uzeo u neposredno prethodnom potezu. Za koje N Buzz ima pobjedničku strategiju?

Teži zadaci

11. A i B igraju igru. Prvo A u 2012 kutija koje čine krug rasporedi $N \geq 2012$ novčića tako da u svakoj kutiji bude barem jedan. Nakon toga naizmjenice povlače poteze (prvo B). Igrač B iz svake kutije premjesti točno jedan novčić u neku susjednu. Igrač A iz svake kutije premjesti najviše jedan novčić u neku susjednu, ali ne one koje je B premještao u svojem zadnjem potezu. Igrač B pobjeđuje ako A ne može postići da je u svakoj kutiji barem jedan novčić u nekom svom potezu. Koji je najmanji N takav da B nema pobjedničku strategiju.
12. Syd i David igraju igru u kojoj naizmjenice povlače poteze. David igra prvi. Na ploči su zapisana prirodna broja (a, b) . U potezu je moguće obrisati broj koji nije manji i zapisati taj broj umanjen za višekratnik onog drugog broja uz uvjet da nije negativan, tj. za $a > b$ (ili $a = b$) brišemo a i pišemo $a - kb$ pri čemu je k prirodni broj manji ili jednak $\frac{a}{b}$. Pobjeđuje onaj tko zapiše nulu. Tko ima pobjedničku strategiju ovisno o (a, b) ?
13. Paul i Art igraju igru. Zadano je n točaka u ravnini koje formiraju pravilni mnogokut, n je neparan i veći od 3. Naizmjenice brišu jednu točku u svakom potezu, onaj koji prvi postigne da svi trokuti čiji su vrhovi preostale točke budu tupokutni, pobjeđuje. Paul igra prvi. Tko ima pobjedničku strategiju ovisno o n ?
14. Jim i Ray igraju sljedeću igru. Zadana je ploča s $m + 1$ horizontalnih i m vertikalnih pravaca. Kamen se nalazi na nekom sjecištu najdonjem horizontalnog i nekog vertikalnog pravca. Jim igra prvi. Igrači naizmjenice povlače poteze u kojima pomaknu kamen po jediničnoj dužini do susjednog sjecišta, ali ne dužinom kojom je kamen već prošao (bez obzira na smjer). Igrač koji ne može povući potez, izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju?

15. Neka je α realan broj. Posejdon i Hefest igraju igru. Zadana je beskonačna kvadratna mreža. Prvo posejdon odabere nekoliko polja koja postanu *poplavljena*, zatim naizmjenice povlače poteze (prvo Hefest), Hefest u svojem potezima gradi zid koji je jedna izlomljena crta po rubovima polja koja se ne siječe, a nakon njegovog n -tog poteza ne smije biti dulji od $n\alpha$ jediničnih dužina. Posejdon u svojem potezu poplavljuje sva polja koja tad imaju poplavljenog susjeda, osim ako zid prolazi njihovom granicom. Za koje α Hefest može osigurati da zid nakon konačno mnogo poteza bude zatvoren i da se sva poplavljena polja nađu unutar njega?
16. Dva igrača igraju igru na beskonačnoj kvadratnoj mreži. U potezu je dozvoljeno orijentirati brid koji nije već orijentiran. Može li drugi igrač sa sigurnošću kreirati ciklus?

Hintovi

1. Očito nema smisla razmatrati P i G pozicije, ali ima jedan logičan način da se usmjeri prema tome tko ima pobjedničku strategiju. Razmisli...
2. Ako si zapeo radeći poteze slične klasičnom šahovskom otvaranju, najradije bih te istjerao van. Razmisli o logičkoj pozadini zadatka.
3. Nadam se da si proučio male primjere. To ti može dati usmjerenje. Ako si zapeo na parnom n , trik s prošlog zadatka ti može pomoći.
4. Neću lagati, u originalnom zadatku Varivoda pomiče sve kraljeve u svojem potezu. Pokušaj to.
5. Pokušaj isto s bilo kojom drugom šahovskom figurom (osim pješaka).
6. Mali primjeri. Koje brojeve drugi igrač želi na kraju igre? Ako si zapeo na b) dijelu, vrati se na a) dio i razmisli zašto prvi igrač ne može učiniti isto.
7. Mali primjeri bi te mogli usmjeriti prema tome tko pobjeđuje za koji (m, n) . Za generalizaciju strategije bi trebalo pobrojati puno različitih pozicija koje nemaju baš veze jedna s drugom. Pokušaj nešto drugo. Bonus zadatak će mali primjeri riješiti.
8. Što misliš tko ima pobjedničku strategiju i zašto (dosta je intuitivno), ako si zapeo promatrajmo ovu pametnu superpoziciju: što će se dogoditi kad netko prvi isprazni jednu kutiju? Pokušaj to povezati s općim slučajem.
9. Ovaj zadatak je bio jedinica na RMM-u kao teorija brojeva, ali postoji razlog zašto sam ga stavio. Nemoj zaglibiti u TB-u, već razmišljaj kombinatorički, neki brojevi su najočita pobjeda za Daniela, neki nisu toliko očiti, ali su blizu toga...
10. Pokušaj riješiti zadatak u kojem je svakom dozvoljeno uzeti barem jednu, a najviše pola preostalih karata, a izgubi onaj kojem ostane jedna karta. Što bi u tom zadatku učinio nakon što malim primjerima dođeš na trag rješenja. Ovdje je sličan postupak, samo što je rješenje manje intuitivno.
11. Nađi neko stanje iz kojeg B može jednim potezom pobijediti. Razmisli, kako bi B želio doći do tog stanja ako nije već dano. Kada može?
12. Ovdje je pozicija (barem za mene) ružno zadana i može se učiniti nešto s (a, b) , tako da pozicija bude uređenija, a igra ekvivalentna. Kad to učiniš, bit će potrebno formulirati P i G pozicije, a pravi cilj je naći neki početak koji pokriva širi raspon pozicija (zašto?). Jedna gubitnička pozicije ne otkriva puno, dok skupovi gubitničkih nisu očiti. Zato je pitanje možeš li naći skup pobjedničkih pozicija odakle bi počeo
13. Ružan uvjet pobjede. Nađi nešto ljepše ekvivalentno uvjetu pobjede. Što nikako ne smije učiniti igrač s pobjedničkom strategijom i kako to izbjeći, prisjeti se "simetrije" na zadatku sa skakačem na šahovskoj ploči.
14. Što će se dogoditi ako kamen počinje u kutu? Slično kao u 6. zadatku, igrač će imati strategiju koja toliko ograničava protivnika da ju vrijedi pokušati primijeniti na opći slučaj. Pitanje je kako bi to izveo...

Rješenja

Napomena: neka rješenja možda nisu potpuna, ali sadrže svaki bitan korak. Ono što može faliti jest neka precizna diskusija koja se svodi na raspisivanje.

1. Prvi igrač postavi u sredinu zatim centralnosimetrično u odnosu na protivnički potez.
2. Pretp. suprotno, tj. da crni ima pobjedničku strategiju. Tada bijeli može pomaknuti i vratiti konja (neutralan potez) i doći u položaj crnog.
3. Za neparne Sully pobjeđuje igrajući osnosimetrično, a za parne prvo Mike pomakne jedno polje desno, zatim primjeni Sullyjevu strategiju za neparne.
4. Podijelimo ploču na pedeset 2×100 pravokutnika. Varivoda će postaviti kraljeve na prvo, treće, ..., i 99. polje u istom retku. Zatim će u svakom potezu pomaknuti kralja koji se nađe u istom pravokutniku kao top tako da zatvori topa (ako ga već ne zatvara), osim toga će imati još jedan ili dva poteza koje će koristiti za pomak nekog kralja naprijed (ali će uvijek držati sve kraljeve u istom ili dva susjedna retka).
5. Jimmy može obojati ploču u 32 boje (2 polja svake boje) tako da skakač iz svakog polja može u drugo polje iste boje. Na taj način će Jimmy imati spreman odgovor na svaki Robertov potez. Traženo bojanje je moguće za 2×4 pravokutnik s 4 boje, konstrukcija se oslanja na ponavljanje tog uzorak.
6. **Izvor.** 2. zadatak, 4. razred, A varijanta.
7. Prvi igrač pobjeđuje uvijek, osim ako je $m = n = 1$. Pretp. da drugi igrač ima pobjedničku strategiju. Kad prvi igrač odigra (m, n) (uzme samo donji desni kut), drugom igraču će pobjednički potez biti neki koji je prvi igrač mogao odigrati u svojem potezu što daje kontradikciju. Napomena: ovakvo zaključivanje logički daje samo negubitničku strategiju prvom igraču, ali u ovom slučaju igra mora završiti nakon konačno mnogo poteza pa je zaključak valjan.
8. Roger može osigurati da uvijek uzima iz kutije s najviše novčića ako je to učinio u prošlom svojem potezu (ili jedne od takvih ako nije jedinstvena). To dokazujemo analizom svih mogućih slučajeva ($a > b, a > c$; $a = b > c, a = b = c$). Zato je Roger će se dogoditi jedno od sljedećeg: ili će David prvi uzeti zadnji iz neke kutije pa će ostati neparno mnogo novčića raspoređenih u dvije (nejednake) kutije, ili će Roger uzeti iz bilo koje kutije i promijeniti brojeve iz $[1, 1, 1]$ u $[1, 1, 0]$. U oba slučaja Roger pobjeđuje.
9. **Izvor.**
10. Indukcijom možemo pokazati da Buzz pobjeđuje ako je N Fibonaccijev broj. Nije teško pokazati za 2,3 ili 5 kao bazu. Korak provodimo tako da rastavimo fibonaccijev broj na dva prošla $a + b$. Ako Woody uzme više ili jednako $\min(a, b)$, onda Buzz može pobijediti u jednom potezu, ako ne, onda će Buzz odigrati onako kako bi igrao da je $\min(a, b)$ početna pozicija (moguće je prema pretp. ind.), nakon nekoliko poteza će ostati $\max(a, b)$ karata i Woody će biti na potezu (Buzz će pobijediti prema pretp. ind.). Za nefibonaccijeve brojeve N možemo pokazati tako da ih rastavimo na najveći fibonaccijev manji od N i ono što ostane (to će uvijek biti manje od trećine od N ili nefibonaccijev broj)
11. **Izvor.**
12. Uočimo da možemo pomnožiti a i b istim brojem bez utjecaja na ishod igre. Tako u svakom potezu možemo umjesto (a, b) imati $(\frac{a}{b}, 1)$ pri čemu je $a > b$. Ako je $\frac{a}{b}$ cijeli broj, Syd pobjeđuje u jednom potezu. Ako je $\frac{a}{b} > 2$, opet Syd pobjeđuje. Jer može direktno doći do broja manjeg od 1 ako je to G pozicija. (tada množimo s njegovim recipročnim da dobijemo $(\frac{a}{b}, 1)$ pri čemu je $a > b$), a može i doći do broja između 1 i 2 te prisiliti Davida da dođe do broja manjeg od 1 (ako je to P pozicija). Ostaje nam promotriti interval $(1, 2)$. Možemo dokazati da su pozicije unutar $(1, 1.5]$ gubitničke jer uvijek vode u pobjedničku, i tako se zadatak svodi na rekurziju/indukciju, a tvrdnja je da su pozicije u kojima je $a = b$ ili $\frac{a}{b} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
13. Art pobjeđuje. Prvo uočimo da će svi trokuti biti tupokutni ako i samo ako je uklonjeno $\frac{n-1}{2}$ uzastopnih vrhova (jedan smjer je očit, a drugi dokažemo pretpostavivši suprotno i promatrajući obodne kutove nad najduljim lukom). Ako ostanu 4 vrha, Art je na potezu i pobjeđuje (ima tetivni četverout koji dijagonalom možemo podijeliti na šiljastokutni i tupokutni trokut). Artova strategija će biti uzimanje vrha koji se nalazi najdalje moguće od Paulovog vrha (između njih je s jedne strane $\frac{n-3}{2}$, a s druge $\frac{n-1}{2}$ vrhova). To će osigurati da se maknuti vrhovi mogu podijeliti u parove, tako da dva uparena nisu u istom nizu od $\frac{n-1}{2}$ uzastopnih polja. Zato će Paulu pobjeda biti nemoguća kad mu ostane 5 vrhova, (u svakom nizu od $\frac{n-1}{2}$ vrhova će ostati barem dva) pa Art pobjeđuje kad mu ostanu 4 vrha. Samo još treba promatrati što će se dogoditi ako su vrhovi koje Art želi maknuti u nekom potezu uklonjeni već prije. Tada promatramo koji su vrhovi bili s njima uklonjeni u paru i na kraju dolazimo do zaključka da je moguće ukloniti neki drugi vrh da se postigne željeno uparivanje.

14. Jim će prvi potez pomaknuti kamen gore do polja na rubu $m \times m$ kvadrata. Zatim povučemo zraku pod kutom 45° i odbijamo ga od ostalih stranica kvadrata te tako dobijemo pravokutnik upisan u $m \times m$ kvadrat (ako je kamen počeo u kutu, onda će to biti samo dijagonala kvadrata). Jim će u svakom potezu nadalje vratiti kamen na stranicu tog pravokutnika. U jednom od vrha pravokutnika će Ray u konačnici ostati bez poteza jer im je stupanj (broj edževa) neparan.
15. **Izvor.**
16. **Izvor**