

Uvod

U ovom ćemo predavanju naučiti rješavati zadatke u kojima se pojavljuju tetivni četverokuti. Kažemo da je četverokut tetivan ako mu se **može opisati kružnica**. Za početak navodimo nekoliko korisnih činjenica vezanih za tetivne četverokute:

Teorem o obodnom i središnjem kutu Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.

Teorem o kutu između tetive i tangente Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- četverokut je tetivan
- zbroj nasuprotnih kuteva je 180°
- simetrale stranica četverokuta sijeku se u jednoj točki (ta točka je onda središte opisane kružnice)
- U četverokutu $ABCD$ vrijedi neka od ovih jednakosti kuteva (a ako vrijedi neka, vrijedi i svaka):
 - $|\angle ABD| = |\angle ACD|$
 - $|\angle ADB| = |\angle ACB|$
 - $|\angle BAC| = |\angle BDC|$
 - $|\angle CAD| = |\angle CBD|$

Zadaci

1. Neka je I središte opisane kružnice trokutu ABC te neka su D i E nožišta visina iz I na stranice BC i AC . Dokažite da je četverokut $IDCE$ tetivan i odredite gdje mu se nalazi središte opisane kružnice.
2. Neka je dan trokut ABC i tangenta na njegovu opisanu kružnicu u točki B . Dokažite da je kut između tetive BC i tangente jednak obodnom kutu $\angle BAC$.
3. Neka je $ABCD$ trapez. Dokažite da je $ABCD$ tetivni četverokut ako i samo ako je $ABCD$ jednakokračan trapez.
4. Unutarnje simetrale kuteva nekog četverokuta sijeku se u točkama A , B , C i D . Dokažite da je $ABCD$ tetivan četverokut.
5. U šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$ točka M je nožište visine iz vrha A , a točka N nožište visine iz vrha B . Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ leži na visini $\overline{BN}$.
6. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC , te neka je N nožište visine iz vrha A . Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.
7. Točke A , B , C , D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $\angle ABC + \angle CDE$.

8. Jednakokračni trokut ABC , $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k . Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD , i E točka na kružnici k_1 . Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E . Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G , dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.
9. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P , a pravac AC u točki Q . Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC . Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.
10. Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ u kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka O je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\angle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D . Pravac okomit na pravac AD koji prolazi kroz točku B siječe pravac AO u točki E . Dokažite da točke A, B, D i E leže na istoj kružnici.
11. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem u točki O . Na kružnici je dana točka C takva da je $OC \perp AB$. Na kraćem luku BC odabrana je točka P . Pravci CP i AB sijeku se u točki Q , a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na AB . Dokažite da je $|BQ| = |QR|$.
12. U tetivnom četverokutu $ABCD$ I_1 i I_2 središta su upisanih kružnica trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$ redom. Dokaži da je četverokut $I_1 I_2 BC$ tetivan.
13. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B . Pravac l siječe kružnicu k_1 u C i E , a kružnicu k_2 u D i F tako da se točka D nalazi između C i E , a točka E između D i F . Pravci CA i BF sijeku se u točki G , a pravci DA i BE u točki H . Dokažite da je $CF \parallel HG$.
14. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N . Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.
15. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine BC siječe dužinu AB u točki E . Kružnica koja prolazi točkom E , vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G . Dokažite da su pravci AD i FG međusobno okomiti.
16. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC , a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO , dokažite da pravac TH prolazi polovištem dužine BC .
17. Neka je K polovište stranice AB trokuta ABC . Neka su L i M redom točke na stranicama AC i BC , takve da $\angle CLK = \angle KMC$. Dokaži da se okomice na AB, AC , i BC kroz K, L , i M , redom, sijeku.

Rješenja

1. OP
2. OP
3. OP-Karakteristične točke trokuta
4. OP
5. 2012., opć 2A, 8.
6. 2015.Opć 2A.2
7. 2016.Opć 2A 4
8. 2016. opć 3A 3
9. 2018., žup 4A, 3.
10. 2017, žup 2A
11. Ako je I centar upisane kružnice trokuta ABC i α kut u vrhu A , tada je

$$|\angle BIC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

Sada imamo

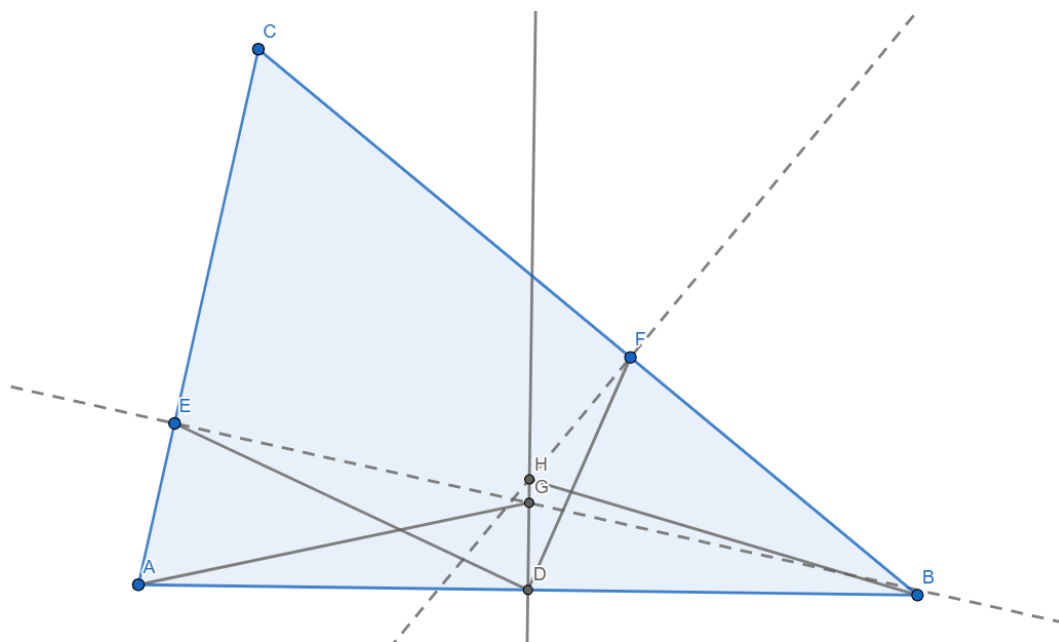
$$|\angle BI_1C| = 90^\circ + \frac{|\angle BAC|}{2} = 90^\circ + \frac{|\angle BDC|}{2} = |\angle BI_2C|$$

pa je četverokut I_1I_2BC tetivan.

12. 2014, drz 1A
13. 2015, drz 1A
14. 2010, drž 2A, 4.
15. 2011.D1A.4
16. 2009.D4A.1

17.

Neka je G presjek okomica iz K i L , a H okomica iz K i M .



Zbog nasuprotnih pravih kuteva, četverokuti $AKGL$ i $BKHM$ su tetivni. Primijetimo da zbog uvjeta zadatka i jednakosti pravih kuteva, $\angle HMK = \angle KLG = \alpha$.

Zbog tetivnog četverokuta, $\angle GAK = \alpha$.

Uočimo da, zbog toga što je K polovište AB , po SSK poučku $\triangle AKG$ i $\triangle BKH$ su sukladni.

Zato su KG i KH jednaki, pa se točke G i H poklapaju.