



Zadaci

1. Dokaži da je $\gcd(a, b, c) = \frac{abc \cdot \text{lcm}(a, b, c)}{\text{lcm}(a, b)\text{lcm}(b, c)\text{lcm}(a, c)}$, gdje je gcd najveći zajednički djelitelj a lcm najmanji zajednički višekratnik.

2. Neka je $a > 1$ prirodan broj. Dokaži da skup

$$\{a^2 + a - 1, a^3 + a^2 - 1, a^4 + a^3 - 1, \dots\}$$

sadrži beskonačan podskup čija su svaka dva različita elementa relativno prosta.

3. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$a \mid b^2 \mid a^3 \mid b^4 \mid a^5 \mid \dots$$

Dokaži da vrijedi $a = b$.

4. Dokaži da u nizu $(\lfloor n\sqrt{2} \rfloor)_n$ ima beskonačno mnogo potencija broja 2.
5. **(IMC 2012.)** Je li skup prirodnih brojeva n za koje vrijedi $n! + 1 \mid (2012n)!$ konačan ili beskonačan?
6. **(IMC 2014.)** Neka je $n > 6$ savršen broj i neka je $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ njegov kanonski prikaz u kojem vrijedi $1 < p_1 < \dots < p_k$. Dokaži da je e_1 paran broj.
7. **(Cyberspace Mathematical Competition.)** Neka je $f(x) = 3x^2 + 1$. Dokaži da za svaki prirodan broj n , produkt

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n)$$

ima najviše n različitih prostih faktora.

8. **(IMOSL 2016.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve m, n vrijedi

$$0 \neq f(m) + f(n) - mn \mid mf(m) + nf(n).$$

9. **(Vojtech 2016.)** Odredi sve prirodne brojeve n takve da $\varphi(n) \mid n^2 + 3$.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Dokaži da je $v_p(LHS) = v_p(RHS)$ za sve proste p .
2. Konstrukcija indukcijom, koristi mali Fermatov teorem.
3. Promotri $v_p(a)$ i $v_p(b)$.
4. Promotri binarni zapis broja $\sqrt{2}$.
5. Nađi veliki broj koji dijeli $(2012n)!$ koristeći multinomijalni koeficijent.
6. Dokaži da $6 \mid n$.
7. Koristi matematičku indukciju.
8. Promotri mogućnosti za $f(p)$ gdje je p prost broj.
9. Dokaži da n ima najviše dva različita prosta faktora koristeći činjenicu da 8 ne dijeli $n^2 + 3$.

Rješenja

Korištene oznake:

- LHS (left hand side) - lijeva strana promatranog izraza (najčešće jednačbe)
 - RHS (right hand side) - desna strana promatranog izraza (najčešće jednačbe)
 - LTE - Lifting the exponent lemma
1. Pokažimo da za proizvoljan prost broj p vrijedi $v_p(LHS) = v_p(RHS)$. Tada će slijediti tvrdnja zadatka jer kada izrazi na lijevoj i desnoj strani ne bi bilo jednaki, postojao bi prost broj koji dijeli jednu stranu više puta nego drugu. Primijetimo da vrijedi
 - $v_p(\gcd(a, b, c)) = \min\{v_p(a), v_p(b), v_p(c)\}$,
 - $v_p(\text{lcm}(a, b, c)) = \max\{v_p(a), v_p(b), v_p(c)\}$,
 - $v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$, ako $b \mid a$.

Uvedimo oznake $x = v_p(a), y = v_p(b), z = v_p(c)$. Sada možemo zaključiti:

$$v_p(LHS) = \min\{x, y, z\},$$

$$v_p(RHS) = x + y + z + \max\{x, y, z\} - \max\{x, y\} - \max\{y, z\} - \max\{x, z\}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \geq y \geq z$. Sada imamo da vrijedi

$$v_p(LHS) = z,$$

$$v_p(RHS) = x + y + z + x - x - y - x = z,$$

čime smo dokazali da vrijedi $v_p(LHS) = v_p(RHS)$, a time i dovršili zadatak.

2. Konstruirat ćemo jedan takav podskup koristeći matematičku indukciju tako da ćemo u svakom koraku dodati jedan element.
 - **Baza.** Definiramo $B_1 = \{a^2 + a - 1\}$. B_1 zadovoljava svojstvo da su svaka dva njegova različita elementa relativno prosta.
 - **Pretpostavka.** Pretpostavimo da sada imamo skup $B_n = \{a^2 + a - 1, a^{k_2+1} + a^{k_2} - 1, a^{k_3+1} + a^{k_3} - 1, \dots, a^{k_n+1} + a^{k_n} - 1\}$ koji zadovoljava svojstvo da su svaka dva njegova različita elementa relativno prosta.
 - **Korak.** Neka je P skup svih prostih brojeva q za koje postoji element skupa B_n koji je djeljiv s q i označimo elemente od P s $p_1, p_2, \dots, p_t$. Prema malom Fermatovu teoremu, za svaki $p \in P$ (činjenicu $p \nmid a$ provjeravamo odmah ispod) imamo

$$m = a^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_t-1)+1} + a^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_t-1)} - 1 \equiv a + 1 - 1 \equiv a \pmod{p}.$$

Dovoljno je provjeriti da p ne dijeli a jer smo tada našli novi element početnog skupa koji je različit od svih iz B_n (jer je veći od svih dosadašnjih) i koji je relativno prost sa svima iz B_n . Budući da je $p \in P$, za neki $r \in \mathbb{N}$ vrijedi $p \mid a^{r+1} + a^r - 1$, pa kada bi p dijelio a , to bi impliciralo $p \mid 1$ što je kontradikcija. Dakle p ne dijeli a , pa ne dijeli ni m te smo dovršili korak indukcije uz $B_{n+1} = B_n \cup \{m\}$.

3. Pretpostavimo da a i b nisu jednaki. Tada postoji prost broj p takav da $v_p(a) \neq v_p(b)$. Promotrimo najprije slučaj $v_p(a) > v_p(b)$. Dakle za neki $x > 0$ je $v_p(a) = v_p(b) + x$. Sada vidimo da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a^{2n-1} \mid b^{2n} \implies v_p(a^{2n-1}) \leq v_p(b^{2n}) \iff (2n-1)v_p(a) \leq 2nv_p(b)$$

$$\implies v_p(a) \leq \frac{2n}{2n-1}v_p(b)$$

$$\implies x = v_p(a) - v_p(b) \leq \frac{2n}{2n-1}v_p(b) - v_p(b) = \frac{1}{2n-1}v_p(b).$$

Tvrdimo da ova nejednakost $x < \frac{1}{2n-1}v_p(b)$ ne može vrijediti za svaki prirodan broj n . Naime, ona je ekvivalentna s

$$n < \frac{v_p(b)}{2x} + \frac{1}{2},$$

što ne vrijedi čim uzmemo n koji je veći od $\frac{v_p(b)}{2x} + \frac{1}{2}$. Dakle, dobili smo kontradikciju i ne može biti $v_p(a) > v_p(b)$. Na isti način možemo riješiti i slučaj $v_p(a) < v_p(b)$ koristeći $b^{2n} \mid a^{2n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovime smo pokazali da ne postoji prost broj takav da je $v_p(a) \neq v_p(b)$, pa a i b moraju biti jednaki.

4. U binarnom zapisu imamo $\sqrt{2} = \overline{b_0.b_1b_2\dots}$, pri čemu je $b_i \in \{0, 1\}$. Budući da je $\sqrt{2}$ iracionalan, znamo da postoji beskonačno mnogo indeksa i takvih da je $b_i = 1$. Ako je $b_k = 1$, onda postavljanjem $m = \lfloor 2^{k-1}\sqrt{2} \rfloor = \overline{b_0b_1\dots b_{k-1}}$ dobivamo nejednakosti

$$2^{k-1}\sqrt{2} - 1 < m < 2^{k-1}\sqrt{2} - \frac{1}{2},$$

iz čega odmah slijedi $\lfloor (m+1)\sqrt{2} \rfloor = 2^k$.

5. Neka je n prirodan broj takav da $n! + 1 \mid (2012n)!$. Budući da razlomak $\frac{(2012n)!}{n!^{2012}}$ predstavlja broj permutacija multiskupa koji se sastoji od n jedinica, n dvojki, $\dots$, n brojeva 2012, slijedi da $n!^{2012} \mid (2012n)!$. Kako je $\gcd(n!^{2012}, n! + 1) = 1$, slijedi $n!^{2012}(n! + 1) \mid (2012n)!$ te imamo sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} n!^{2013} &< n!^{2012}(n! + 1) \leq (2012n)! < (2012)!^n \cdot n!^{2012} \\ &\implies \sqrt[n]{n!} < 2012!, \end{aligned}$$

pa zbog $n! > \sqrt{n^n}$ slijedi $n < (2012!)^2$, što znači da takvih n ima konačno mnogo.

6. Znamo da vrijedi $\prod_{i=1}^k (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{e_i}) = 2n$. Pretpostavimo da je e_1 neparan. To znači da vrijedi

$$p_1 + 1 \mid 1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{e_1} \mid 2n,$$

stoga $p_1 + 1 \mid 2n$. Kako neki prost broj različit od p_1 dijeli $p_1 + 1$, zbog $p_1 + 1 < p_3$ slijedi $p_2 = p_1 + 1$, pa je $(p_1, p_2) = (2, 3)$. Sada znamo da $6 \mid n$, pa imamo

$$2n > n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 1 = 2n + 1,$$

što je kontradikcija.

7. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom osim za $n = 1$ kada je izraz jednak 2^2 :

- Baza ($n = 2$): $f(2) = 2^2 \cdot 13$
- Pretpostavka: Za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, produkt $f(1)f(2)\dots f(n-1)$ ima najviše $n-1$ različitih prostih faktora.
- Korak: Dovoljno je pokazati da novi član $f(n) = 3n^2 + 1$ neće doprinijeti umnošku $f(1)f(2)\dots f(n-1)$ s dva nova prosta faktora. Pretpostavimo suprotno, odnosno da su p, q različiti prosti brojevi takvi da $pq \mid f(n)$ i nijedan od njih ne dijeli $f(k)$ ni za koji $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Kada bi jedan od brojeva p i q (BSO neka je to p) bio manji od $2n$, tada bi imali $3(p-n)^2 + 1 \equiv 3n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, odnosno $p \mid f(|p-n|)$, no zbog $p \mid 3n^2 + 1 \implies p \nmid n \implies p \neq n$ i $p < 2n$ vrijedi $0 < |p-n| < n$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da $p \nmid f(k) \forall k < n$. Dakle $p, q \geq 2n$ što implicira $pq \geq 4n^2 > 3n^2 + 1$ pa je nemoguće da $pq \mid f(n)$ te smo dobili traženu kontradikciju.

8. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1480691p8639255>

9. <https://vjmc.osu.cz/storage/uploads/j26solutions1.pdf>