J6	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2021./22.

Dirichletov princip

Mislav Brnetić
13. studeni 2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Dirichletov princip (eng. *Pigeonhole principle*) jedno je od osnovnih kombinatornih pravila koje se često koristi. Najjednostavnija varijanta Dirichletovog principa glasi:

Teorem 1

Ako $n+1$ predmet raspoređujemo u n kutija, sigurno postoji barem jedna kutija u kojoj se nalaze (barem) dva predmeta.

Bitno je napomenuti da ne znamo koliko ima takvih kutija niti koliko predmeta imamo u toj nekoj kutiji (primjerice možemo sve predmete imati u istoj kutiji), ono što znamo je da postoji kutija sa barem dva predmeta.

Dokaz ovog pravila je jednostavan.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pri raspoređivanju $n+1$ predmeta u n kutija ne postoji niti jedna kutija u kojoj se nalaze dva predmeta.
Drugim riječima, u svakoj se kutiji nalazi najviše jedan predmet. Kako imamo n kutija, ukupno imamo najviše n predmeta što je u kontradikciji s pretpostavkom da imamo $n+1$ predmet.
Dakle, sigurno postoji barem jedna kutija u kojoj se nalaze barem dva predmeta.

□

Promotrimo primjer.

Primjer 1. Postoje li u razredu sa 15 učenika dva učenika rođena u istom mjesecu?

Rješenje. Raspoređujemo učenike (predmete) u kutije (mjesece u kojima su rođeni). Kako imamo 15 učenika i 12 mjeseci, te kako vrijedi $15 \geq 13 = 12+1$, po Dirichlotovom principu postoji barem jedan mjesec u kojemu su rođena barem dva učenika, dakle postoje dva učenika rođena u istom mjesecu.

◁

Primijetite da se kod ovakvih zadataka tvrdnja može i direktno dokazati metodom kontradikcije. U nekim slučajevima takav će nam pristup biti čak i jednostavniji.

Već je sada jasno da možemo dokazati i općenitiju verziju Dirichletovog principa:

Teorem 2

Ako m predmeta raspoređujemo u n kutija, postoji barem jedna kutija u kojoj je barem $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmet.
($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj y takav da je $y \leq x$.)

Primijetimo da odavdje slijedi i sljedeća intuitivnija tvrdnja:

Korolar 3

Ako imamo barem $kn+1$ predmeta koje raspoređujemo u n kutija, u nekoj kutiji će biti barem $k+1$ predmeta.

Dokaz ovog pravila je potpuno analogan ranijem dokazu pa je stoga ostavljen čitatelju za vježbu.

Primjer 2. Dokažite da na skupu od 1000 ljudi postoje tri s istim rođendanom.

Rješenje. Raspoređujemo ljude (predmete) u kutije (dane kada su rođeni). Dana u godini ima 366 (računajući i prijestupne godine). Po Dirichletovom pravilu možemo zaključiti kako će na neki dan biti rođeno barem

$$\left\lfloor \frac{1000-1}{366} \right\rfloor + 1 = 3$$

a to je i trebalo dokazati.

◁

Lakši zadaci

1. Zadano je 26 različitih prirodnih brojeva. Dokažite da postoje dva čija je razlika djeljiva sa 25.

2. Ivan u ladici ima 20 različitih parova čarapa. Koliko čarapa mora minimalno izvaditi kako bi bio siguran da je izvadio jedan par čarapa?

3. Škola ima 1000 učenika i 30 razreda. Neka je m broj učenika u razredu s najviše učenika. Odredite najmanji mogući m.

4. U kutiji se nalazi 9 plavih, 3 žute, 4 crvene i 5 zelenih kuglica.

(a) Koliko minimalno kuglica moramo izvući kako bismo bili sigurni da smo izvukli barem 2 kuglice iste boje?

(b) Koliko minimalno kuglica moramo izvući kako bismo bili sigurni da smo izvukli barem 2 kuglice plave boje?

(c) Koliko minimalno kuglica moramo izvući kako bismo bili sigurni da smo izvukli barem 1 kuglicu svake boje?

5. Na okupljanju se okupilo 100 ljudi. Svatko svakoga ili poznaje ili ne poznaje i poznanstva su uzajamna. Dokažite da postoje dvije osobe koje poznaju jednak broj ljudi.

Umjereni zadaci

6. Zadano je 101 različitih prirodnih brojeva manjih od 200. Dokažite da među njima postoje dva broja takva da im je zbroj jednak 200.

7. U svako polje 5×5 tablice upisujemo jedan od brojeva $-1, 0, 1$ te zbrajamo brojeve po stupcima, retcima i dijagonalama. Dokažite da će među tim zbrojevima dva biti jednaka.

8. Na zid kvadratnog oblika duljine stranice $1m$ je sletio 51 komarac. Marko na raspolaganju ima okruglu metlicu polumjera $\frac{1}{7}m$ i želi jednim potezom pogoditi čim više komaraca. Dokažite da jednim potezom može pogoditi 3 komarca.

9. Dokažite da među bilo kojih 6 ljudi postoji troje koji se ili svi međusobno ne poznaju ili svi međusobno poznaju (poznanstva su uzajamna).

10. Jedan ljubitelj prirode je jednom zapisao sljedeću izjavu:
Šuma na kraju sela je golema. Sigurno je broj stabala veći od broja listova na svakom od njih.
Ako je ta izjava istinita, možemo li zaključiti i da postoje dva stabla s istim brojem listova (stablo može biti i bez listova)?

11. Dano je 5 točaka u ravnini s cjelobrojnim koordinatama. Dokažite da Matej može izabrati dvije takve da i polovište dužine koju te točke određuju ima cjelobrojne koordinate.

12. 30 ljudi označenih brojevima (ne nužno tim redom) $1, 2, ..., 30$ je na sastanku te sjede oko okruglog stola sa označenim mjestima redom $1, 2, ..., 30$. Nitko ne sjedi na mjestu označenom svojim brojem. Dokažite da se nekim okretanjem stola neke dvije osobe sigurno mogu naći na mjestu označenim njihovim brojevima.

13. Dano je 27 točaka u ravnini raspoređenih u 3 retka i 9 stupaca. Svaka točka obojana je u crvenu ili plavu boju. Dokažite da postoji pravokutnik s vrhovima u tim točkama kojemu su sva četiti vrha iste boje.
(*) Za vježbu možete pokušati dokazati istu tvrdnju, samo za 7 stupaca.

14. 14 točaka je smješteno unutar pravilnog šesterokuta duljine stranice 1. Dokažite da postoji trokut kojemu su vrhovi među ovim točkama i čije su duljine stranica manje ili jednake 1.

15. Dokažite da među bilo koja tri cijela broja možemo odabrati dva tako da je $a^3b - ab^3$ djeljivo s 10.

16. Autor ovog predavanja je prolio tintu na papir dimenzije 21×30 tako da je ukupna površina svih mrlja jednaka 314. Dokažite da postoje dvije točke u čistom dijelu papira, osnosimetrične s obzirom na pravac koji raspolavlja zadani papir na dva pravokutnika dimenzija 21×15.

17. Gladni (i sve više okrugli) tuljan Tuljko svaki dan pojede bar 1 kilogram ribe (i broj pojedenih kilograma u danu uvijek je prirodan). Tijekom 365 dana pojeo je čak 700 kilograma ribe. Dokažite da postoji niz od nekoliko uzastopnih dana u kojima je Tuljko ukupno pojeo 29 kilograma ribe.

Teži zadaci

18. Zadano je 9 pravaca, od kojih svaki dijeli zadani kvadrat na dva trapeza čije su površine u omjeru $2 : 3$. Dokažite da barem 3 zadana pravca prolaze kroz istu točku.

19. Neka je n proizvoljan prirodan broj.

(a) Dokažite da postoji višekratnik broja n koji se sastoji samo od znamenaka 0 i 1.

(b) Dokažite da takvih višekratnika ima beskonačno mnogo.

20. 17 ljudi dopisuje se međusobno u parovima o 3 teme. Dokažite da postoje 3 osobe koje se sve međusobno dopisuju o istoj temi.

21. Dokažite da postoji prirodan broj koji započinje znamenkama 1938472638628, a djeljiv je brojem 2020.

22. Za neki prirodan broj n dano je n prirodnih brojeva manjih od 100. Odredite najmanji n takav da sigurno među danim brojevima postoje 2 broja pri čemu je jedan višekratnik drugog.

23. U nekoliko je kutija smješteno 5100 kuglica od kojih je 300 crnih, a ostale su bijele. U svakoj su kutiji najviše 3 crne kuglice, a niti jedna kutija nije prazna. Dokažite da postoje dvije kutije s jednakim brojem kuglica.

24. Za Božić je skupina od 32 djece dobila $n \geq 3$ igračaka. Svako je dijete htjelo više od dvije trećine igračaka uzeti sebi. Dokažite da postoje 3 igračke od kojih je svako dijete htjelo barem jednu uzeti za sebe.

Više zadataka možete pronaći na `www.skoljka.org`.

Hintovi

1. Promatrajte ostatke pri dijeljenju sa 25.

2. Svaki par čarapa (kao vrsta) je kutija, a čarape su predmeti.

3. Učenici su predmeti, a razredi su kutije.

4. (a) Kutije su boje, a kuglice su predmeti.

(b) Dokažite metodom kontradikcije.

(c) Dokažite metodom kontradikcije.

5. Što se događa ukoliko postoji netko tko poznaje svakoga?

6. Napravite 100 kutija tako da je zbroj dva broja u (skoro) svakoj kutiji 200.

7. Koji su mogući zbrojevi u svakom stupcu/retku/dijagonali?

8. Podijelite zid na 25 dijelova, "kutija" tako da svakim udarcem može pogoditi jedan cijeli dio.

9. Fiksirajte jednu osobu i promatrajte koliko ljudi ta osoba poznaje/ne poznaje.

10. Promatrajte koliko sve stabla mogu imati listova ako vrijedi tvrdnja zadatka.

11. Kakva je ovisnost koordinata polovišta o parnosti koordinata točaka?

12. Promotrite koliko treba okrenuti stol kako bi se netko našao na mjestu označenom svojim brojem.

13. Promotrite koliko ima različitih stupaca.

14. Podijelite šesterokut na 6 dijelova, slično kao u 8. zadatku.

15. Faktorizirajte zadani izraz.

16. Promotrite površinu koju dobijete ako pogledate uniju obojane površine i osnosimetrične slike obojane površine? Što možete tada zaključiti o čistom području?

17. Promatrajte brojeve a_1, a_2, $\ldots$, a_{365} koji predstavljaju ukupan broj pojedenih kilograma ribe zaključno s odgovarajućim danom. Stoga vrijedi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{365}$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_{365} + 29$ (razmislite zašto).

18. Promotrite sjecišta zadanih pravaca s dužinama, paralelnim sa stranicama kvadrata, koje dijele kvadat na dva dijela s površinama u omjeru 2 : 3.

19.
- Promatrajte ostatke pri dijeljenju brojeva $1, 11, 111, ...$ sa n.
- Koristite ideju iz zadatka 1.

20.
- Fiksirajte jednu osobu i odredite s koliko se ona ljudi dopisuje o istoj temi.
- Koristite zadatak 9.

21. Primijenite ideju kao u 19. zadatku.

22.
- Dokažite da je rješenje 51.
- Napravite odgovarajućih 50 kutija.

23. Pretpostavite suprotno i iskoristite uvjete iz zadatka.

24. Koliki je ukupni broj želja i što iz toga možemo zaključiti?

Rješenja

1. Ostataka pri dijeljenju s brojem 25 ima 25. Dakle, po Dirichletovom principu, među 26 prirodnih brojeva sigurno postoje dva s istim ostatkom pri dijeljenju 25 (brojeve - predmete raspoređujemo po ostacima - kutijama), a njihovim oduzimanjem dobivamo broj djeljiv sa 25.

2. Dokažimo da je rješenje 21.

- Za $n \leq 20$ čarapa možemo uzeti po jednu čarapu od svakog para (odnosno od prvih n parova) pa nećemo sigurno imati jedan par čarapa.
- Za 21 čarapu, raspoređujemo čarape u 20 kutija - svaki par ima svoju kutiju, odnosno svaku čarapu stavljamo u odgovarajuću kutiju. Po Dirichletovom principu postoji kutija sa 2 čarape, koje dakle tvore par.

Primijetite da je nužno dokazati da za manje od 21 *tvrdnja ne vrijedi (u ovom slučaju postoji takva konstrukcija) i da za* 21 *tvrdnja vrijedi.*

3. Po Dirichletovom principu, sigurno postoji razred sa barem $\left\lfloor \frac{1000-1}{30} \right\rfloor = 34$ učenika pa samim time će u razredu s najviše učenika biti barem 34 učenika. Preostaje dokazati da je ta situacija moguća, odnosno da postoji slučaj kada u razredu s najviše učenika i jest 34 učenika. Jedan takav primjer su 20 razreda sa 33 učenika i 10 razreda sa 34 učenika pa možemo zaključiti da je traženi najmanji mogući m zaista 34.

4. (a) Neka su boje kutije, a kuglice predmeti.

Po Dirichletovom principu za 5 kuglica sigurno imamo kutiju sa dvije kuglice, dakle imamo dvije kuglice iste boje.

Konstrukcija kojom se dokazuje da za manje od 5 kuglica ne postoje nužno dvije kuglice iste boje je trivijalna.

(b) Dokažimo da je odgovor 14.

Prvo dokažimo da će među 14 kuglica sigurno postojati dvije plave boje.

Pretpostavimo suprotno, odnosno među 14 kuglica ne postoje dvije plave boje. Dakle, postoji najviše 1 plava, 3 žute, 4 crvene i 5 zelenih što je ukupno 13 kuglica što je u kontradikciji s pretpostavkom da je kuglica 14. Dakle, sigurno postoje barem dvije plave kuglice.

Konstrukcija kojom se dokazuje da za manje od 14 kuglica ne postoje nužno dvije plave kuglice je trivijalna (i proizlazi direktno iz gornjeg dokaza).

Odgovor se može lako naslutiti upravo iz ove konstrukcije.

(c) Dokažimo da je odgovor 19.

Prvo dokažimo da će među 19 kuglica sigurno postojati barem 1 kuglica svake boje.

Kao i u ranijem dokazu, pretpostavimo suprotno, odnosno među tim kuglicama ne postoji barem 1 kuglica svake boje. Ako među tim kuglicama ne postoji niti jedna plava kuglica, imamo najviše 3 žute, 4 crvene i 5 zelenih kuglica, odnosno ukupno najviše 12 kuglica. Analogno dobivamo i da ukoliko nema niti jedne kuglice neke druge boje, imamo ukupno najviše 18 kuglica što je u kontradikciji s pretpostavkom da je kuglica 19. Dakle, postoji barem 1 kuglica svake boje.

Konstrukcija kojom se dokazuje da za manje od 19 kuglica ne postoji nužno 1 svake boje također direktno slijedi iz dokaza.

5. Odmah se može uočiti da svatko poznaje $0, 1, ..., 99$ drugih osoba, odnosno postoji mogućih 100 brojeva poznanstava. To nam nije dovoljno za primjenu Dirichletovog principa. Zato promotrimo sljedeća dva slučaja:

- Postoji netko tko poznaje sve ostale. Dakle, i svi poznaju tu osobu. Zato nitko ne poznaje 0 osoba pa svatko poznaje $1, 2, ..., 99$ osoba. Dakle, kako postoji 99 mogućih brojeva poznanstava od strane svake osobe (kutije), sigurno barem dvije osobe (predmeti) poznaju jednak broj ljudi (nalaze se u istoj kutiji).
- Nitko ne poznaje sve ostale. Dakle, nitko ne poznaje 99 osoba pa svatko poznaje $0, 1, ..., 98$. Kako ponovno postoji 99 mogućih brojeva poznanstava od strane svake osobe, postoje dvije osobe koje poznaju jednak broj ljudi.

6. Kako bismo primijenili Dirichletov princip, cilj nam je, slično kao u 1. zadatku, podijeliti brojeve u 100 kutija, tako da je zbroj dva broja u nekoj kutiji 200.
Možemo definirati kutije na sljedeći način:

- 1. kutija - za brojeve 1 i 199.
- 2. kutija - za brojeve 2 i 198.
- ...
- 100. kutija - za broj 100.

Sada, svaki od zadanih brojeva možemo rasporediti u neku od kutija te, ako postoji kutija sa dva broja, njihov je zbroj očito 200.
Po Dirichletovom principu, kako imamo 101 broj i 100 kutija, postoji kutija sa 2 broja, dakle postoje dva broja čiji je zbroj 200.

7. U svakom stupcu/retku/dijagonali moguće je postići zbrojeve $-5, -4, ..., 5$ kojih ima 11 različitih. Kako imamo 5 stupaca, 5 redaka i 2 dijagonale, sigurno će se jedan zbroj ponoviti barem 2 puta.

8. Podijelimo zid na 25 dijelova, tj. "kutija". Tada će po Dirichletovom principu na barem jednom dijelu biti barem 3 komarca.
Podijelimo svaku stranicu kvadrata na 5 jednakih dijelova duljine $\frac{1}{5}m$ te pomoću njih napravimo mrežu kvadrata. Tih kvadrata ima upravo 25 pa smo već dokazali da postoji barem jedan u kojemu su barem 3 komarca.
Preostaje geometrijski dokazati kako se može jednim udarcem metlice pogoditi jedan cijeli kvadrat. Lako se dokaže kako se takav kvadrat može smjestiti u krug polumjera $\frac{1}{7}m$ čime je dokaz završen.

9. Pri rješavanju ovog zadatka može pomoći grafički prikaz poznanstava.
Fiksirajmo jednu osobu. Bez smanjenja općenitosti, po Dirichletovom principu, ta osoba poznaje barem 3 osobe (zaista, za nastavak dokaza potpuno je nebitno poznaje li ili ne poznaje ta osoba te 3 osobe pa možemo pretpostaviti da ih poznaje).
Sada, ako se bilo koje dvije od te tri osobe međusobno poznaju, dokaz je završen (imamo prvu fiksiranu osobu i te dvije osobe koje se međusobno poznaju).
Inače se te tri osobe međusobno ne poznaju pa je ponovno dokaz završen.

10. Neka šuma ima n stabala.
S obzirom da je pretpostavka zadatka kako je broj stabala veći od broja listova na svakome od njih, zaključujemo kako svako stablo ima $0, 1, 2, ..., n-1$ listova, odnosno postoji n mogućnosti za broj listova.
No, sada primijetimo da po Dirichletovom principu ne možemo dokazati da postoje dva stabla s istim brojem listova (naime, za takav dokaz bilo bi nam potrebno $n-1$ mogućnosti za broj listova na stablu).
Kako bismo dokazali da ne moraju postojati dva stabla s istim brojem listova, nužno je (i dovoljno) pronaći takvu konstrukciju (*primijetite kako prethodni argument nije dovoljan*).
Ta konstrukcija je trivijalna, te se postiže tako da i-to stablo ima $i-1$ list, za $i \in \{1, 2, ..., n\}$, gdje su stabla označena brojevima od 1 do n.

11. Za početak, primijetimo da je za točke $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ polovište dužine $\overline{AB}$ dano sa $P = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.
x koordinata polovišta je cijeli broj ako i samo ako je $x_1 + x_2$ paran broj, a to je ako i samo ako su x_1 i x_2 iste parnosti.
Analogno, y koordinata polovišta je cijeli broj ako i samo ako su y_1 i y_2 iste parnosti.
Dakle, kako bi obje koordinate polovišta bile cijeli brojevi, odgovarajuće koordinate točaka moraju biti iste parnosti.
Kako za parnosti 2 koordinate imamo 4 mogućnosti (PP, PN, NP, NN), među 5 točaka u ravnini će sigurno barem 2 imati jednaku parnost odgovarajućih koordinata pa će i polovište dužine koju određuju imati cjelobrojne koordinate.

12. Za početak, definirajmo da stol rotiramo u smjeru kazaljke na satu (svako suprotno okretanje možemo svesti na okretanje u smjeru kazaljke na satu).
Definirajmo jedan okret kao rotaciju za jedno mjesto (osoba sjedi na susjednom mjestu za stolom).
Svaka osoba se na mjestu označenom svojim brojem može naći za $1, 2, ...$ ili 29 okretaja.
Kako imamo 30 osoba, po Dirichletovom principu zaključujemo kako će se barem dvije osobe naći na mjestu označenom svojim brojem za jednak broj okretaja, dakle takvim okretanjem stola postiže se da se te dvije osobe naći na mjestu označenom svojim brojem.

13. Školsko natjecanje 2013. SŠ A-3.5.

14. Tvrdnja zadatka ekvivalentna je tvrdnji da u zadanom šesterokutu postoje 3 točke čija je udaljenost u parovima manja ili jednaka 1.
Ako podijelimo šesterokut na 6 jednakostraničnih trokuta, spajanjem vrhova i središta opisane kružnice, po Dirichletovom principu vrijedi da će u barem jednom od tih trokuta postojati barem tri točke.
Geometrijski se lako dokaže kako je udaljenost dviju točaka u jednom jednakostraničnom trokutu duljine stranice 1 manja ili jednaka 1 čime je dokaz završen.

15. Zadani izraz $a^3b - ab^3$ jednak je

$$ab(a-b)(a+b)$$

Izraz je djeljiv s 10 ako i samo ako je djeljiv s 2 i s 5.
Dokažimo prvo kako je djeljiv s 2.
Naime, za bilo koje cijele brojeve a i b, ako je barem jedan od njih paran, izraz će biti djeljiv s 2.
No, ako su oba neparni, tada je $a - b$ parno, pa je izraz ponovno djeljiv s 2.
Time smo dokazali kako je zadani izraz djeljiv s 2 neovisno o izboru brojeva.
Preostaje dokazati kako je izraz djeljiv s 5.
Naime, ako je barem jedan od danih brojeva djeljiv s 5, izraz je djeljiv s 5.
No, ako nije, brojeve možemo razvrstati u one koji daju ostatak 1 ili 4 te 2 ili 3 (dakle takve skupove da je zbroj ili razlika dva broja iz tog skupa djeljiva sa 5, vidi zadatke 1. i 6.).
Po Dirichletovom principu sada barem jedan od ta dva skupa ima barem dva elementa, pa je njihov zbroj ili razlika djeljiva sa 5, čime je dokaz završen.

16. Uz postojeće mrlje, promotrimo papir koji ima "zamrljane" i osnosimetrične slike originalnih mrlja s obzirom na danu os simetrije (dakle uniju mrlja i osnosimetrične slike mrlja). Primijetimo kako je takav papir osnosimetričan.
Kako je površina svih originalnih mrlja jednaka 314, mrlje će sada biti površine najviše 628 (naime, neke originalne mrlje će se preklapati s novima).
Međutim, površina cijelog papira je $21 \cdot 30 = 630$ pa zaključujemo da sigurno postoji dio površine papira koji nije zamrljan.
No, i osnosimetrična slika čistog dijela sada mora biti čisti dio (naime, inače bi i promatrani dio bio zamrljan zbog osnosimetričnosti), zbog čega vrijedi tvrdnja zadatka.

17. Promatrajmo brojeve a_1, a_2, $\ldots$, a_{365} koji predstavljaju ukupan broj pojedenih kilograma ribe zaključno s odgovarajućim danom. Stoga vrijedi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{365}$.
Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_{365} + 29$, jer ako je to slučaj, tj. ako za neke i i j vrijedi $a_i + 29 = a_j$, onda vrijedi $j > i$ te da je u danima između Tuljko pojeo točno 29 kilograma ribe.
Brojevi $a_1, a_1 + 29, a_2, a_2 + 29, \ldots, a_{365}, a_{365} + 29$ nalaze se između 1 i 729 uključivo. Kako tih brojeva ima 730, po Dirichletovom principu zaključujemo da dva broja moraju biti jednaka.
Kako su svi brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ međusobno različiti jer je Tuljko svaki dan pojeo bar 1 kilogram ribe, različiti su i svi brojevi $a_1 + 29, \ldots, a_{365} + 29$. To znači da je neki broj a_i jednak nekom broju $a_j + 29$ i tvrdnja je dokazana.

18. Promotrimo sve 4 dužine paralelne sa stranicama kvadrata, koje dijele kvadrat na dva dijela čiji su omjeri površina $2 : 3$.
Podijelimo nekim pravcem kvadrat na dva trapeza čije su površine u omjeru $2 : 3$ te promotrimo zajedničku stranicu tih trapeza koja se nalazi na pravcu.
Geometrijski se lako pokaže kako ta stranica siječe jednu od 4 ranije opisane dužine u njenom polovištu.
Sada nam je cilj promotriti ta 4 polovišta.
Primijetimo kako svaki od zadanih pravaca prolazi kroz neko od ta 4 polovišta.
No, po Dirichletovom principu sada zaključujemo da kroz jedno od tih polovišta prolaze barem 3 pravca, čime je dokaz završen.

19. (a) Promotrimo brojeve: $1, 11, 111, ..., \overline{11...1}$ (zadnji ima $n+1$ znamenku 1).

Kako postoji n ostataka pri dijeljenju sa n, među ovim brojevima postoje barem 2 s istim ostatkom pa je njihova razlika djeljiva sa n. Njihova je razlika broj oblika 11...10...0 koji zadovoljava uvjete iz zadatka pa je time dokazano da postoji traženi broj.

(b) Pretpostavimo suprotno: traženih višektatnika ima konačno mnogo.

Dakle, kako postoji barem jedan višekratnik oblika iz (a) dijela zadatka, postoji i najveći takav višekratnik, označimo ga sa a_{max}.

$$a_{max} = \overline{11...1} - \overline{11...1}$$

pri čemu prvi od ovih brojeva ima k znamenki 1.

No, sada pogledajmo brojeve koji se sastoje $k, k+1, k+2, ..., k+n$ znamenki 1.

Po (a) dijelu zadatka dobivamo da postoji višekratnik broja n koji se može prikazati kao razlika dvaju od ovih brojeva, a taj je broj sigurno veći od broja a_{max}.

Međutim, a_{max} je po pretpostavci najveći takav broj pa iz toga slijedi kontradikcija.

Dakle, traženih višekratnika ima beskonačno mnogo.

20. Fiksirajmo jednu osobu.
Kako se ta osoba dopisuje sa 16 ljudi, po Dirichletovom principu dopisuje se sa barem 6 ljudi o istoj temi,
Promotrimo dva moguća slučaja:

- Neki par među tih 6 ljudi se dopisuje o toj istoj temi. Dakle, imamo početnu osobu i te dvije osobe koji se u parovima dopisuju o istoj temi pa je dokaz završen.

- Niti jedan par među tih 6 ljudi se ne dopisuje o toj istoj temi. Dakle, dopisuju se o preostale dvije teme. Tada ovaj slučaj možemo svesti na zadatak 9. iz čega slijedi da se među njima 3 osobe dopisuju u parovima o istoj temi pa je dokaz završen.

21. Označimo sa t niz znamenaka 1938472638628 (za rješenje je potpuno nebitno o kojem je nizu znamenaka riječ).
Promotrimo brojeve: $\overline{t}, \overline{tt}, ..., \overline{tt..t}$ pri čemu zadnji od brojeva ima 2021 puta niz znamenaka t.
Analogno kao u 19. zadatku, među tim brojevima postoje barem 2 s istim ostatkom pri dijeljenju sa 2020 iz čega slijedi da je njihova razlika djeljiva brojem 2020, a kako započinje nizom znamenaka t zadovoljava uvjete zadatka.

22. Želimo dokazati da je traženi broj 51.
Prvo dokažimo da za $n < 51$ tvrdnja ne mora nužno vrijediti.
Naime, uzmemo li brojeve $50, 51, ..., 50 + n - 1$, prilično je očito da niti jedan nije višekratnik drugoga (višekratnici su im oni sami te brojevi veći od 100, a takvih nema u ovome skupu).
Dakle, traženi n je barem 51 pa dokažimo da je upravo 51, odnosno da za danih 51 brojeva manjih od 100 postoje dva takva da je jedan višekratnik drugog.
Napravimo 50 "kutija" $A_1, A_3, ..., A_{99}$ i definirajmo kako dodajemo brojeve u te "kutije":
Za svaki neparan broj k, $k \in \{1, 3, 5, ..., 99\}$, u kutiju A_k dodajemo sve brojeve oblika $2^l k, l \in \mathbb{N}_0$.
Sada se lako dokaže da se svaki broj od 1 do 99 dodaje u točno jednu kutiju.
Po Dirichletovom principu, pri raspoređivanju danog 51 broja u ove kutije, postoji barem jedna kutija sa barem 2 broja.
Kako su to brojevi oblika $2^{l_1}k$ i $2^{l_2}k$, jedan je višekratnik drugog i tvrdnja je dokazana, čime je i dokaz završen.

23. Pretpostavimo suprotno, odnosno ne postoje dvije kutije sa istim brojem kuglica.
Označimo sa n broj kutija i sa $x_1, x_2, ..., x_n$ broj kuglica po kutijama (tako da je $x_1 < x_2 < ... < x_n$).
Kako su kutije neprazne, imamo $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq x_1 + 1 = 2$ ..., $x_n \geq x_{n-1} + 1 = n$.
Zbrajanjem nejednakosti dobivamo

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq 1 + 2 + ... + n$$
$$5100 \geq \frac{(n+1)n}{2}$$
$$n(n+1) \leq 10200$$
$$n \leq 100$$

Kako su u svakoj kutiji najviše 3 crne kuglice, a ukupno imamo 300 crnih kuglica, vrijedi i $n \geq 100$.
Dakle, $n = 100$.
Kako je $n = 100$, u svakoj kutiji imamo točno 3 crne kuglice pa je:

$$5100 = x_1 + x_2 + ... + x_n \geq 3 + 4 + ... + 102 = \frac{102 \cdot 103}{2} - 3 = 5250$$

što je kontradikcija. Dakle, postoje dvije kutije s istim brojem kuglica.

24. Kako svako dijete želi barem $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor + 1$ igračaka za sebe, ukupni broj želja djece je veći ili jednak od $32 \cdot \left(\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor + 1\right) > 32 \cdot \frac{2}{3}n = \frac{64}{3}n$.
Po Dirichletovom principu (ili jednostavno metodom kontradikcije) ovdje slijedi da postoji igračka koju želi barem 22 djece.
Sada promotrimo preostalih 10 djece (koji možda ne žele ovu prvu igračku).
Svako od njih sada želi barem $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor$ od preostalih $n-1$ igračaka za sebe.
Analogno dobivamo da je broj želja te djece veći ili jednak od $10 \cdot \left(\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor\right) > 10 \cdot \frac{2}{3}(n-1) = \frac{20}{3}(n-1)$.
Analogno zaključujemo da među tim igračkama postoji igračka koju želi barem 7 djece.
Sada promotrimo preostalih 3 djece (koji možda ne žele ni prvu ni drugu igračku).
Svatko od njih sada želi barem $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor - 1$ od preostalih $n-2$ igračaka za sebe.
Dobivamo da je broj želja te djece veći ili jednak od $3 \cdot \left(\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor - 1\right) > 3 \cdot \frac{2}{3}(n-2) = 2(n-2)$.
Ovdje zaključujemo kako među tim igračkama postoji barem jedna koju želi svo troje djece.
Dakle, dokazali smo da postoje tri igračke od kojih svako dijete želi barem jednu za sebe.