Teorija grafova

Lucija Relić
13.11.2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

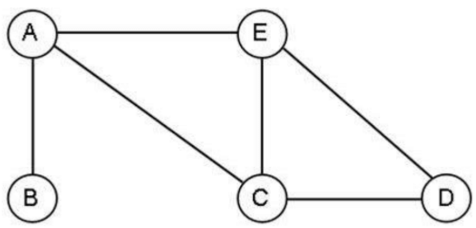
Uvod

Definicija 1

Neusmjereni graf $G = (V, E)$ je uređeni par skupova V (*vertices*, skup vrhova) i E (*edges*, skup bridova) pri čemu su članovi skupa E dvočlani podskupovi skupa vrhova grafa koji predstavljaju vezu između tih vrhova.

Intuitivno, vrhovi grafa su točke ili kružići, a bridovi spojnice između vrhova. Graf je **konačan** ako mu je skup vrhova konačan. Ako skup bridova sadrži uređene parove vrhova kažemo da je graf **usmjeren**.

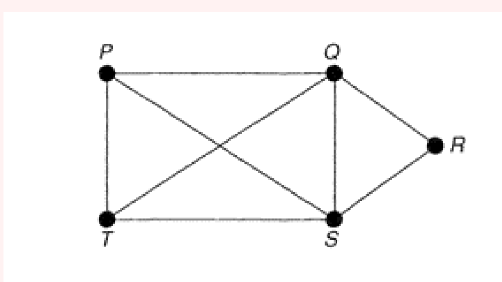
Primjer 1. Međusobna rukovanja u skupu od 5 ljudi možemo modelirati grafom pri čemu će vrhovi predstavljati osobe, a bridovi njihova rukovanja.



Primjerice, osoba B rukovala se s osobom A, ali nije s osobama C, D i E.

Oprez!

Ne mora svako sjecište bridova označavati vrh. Primjerice, donji graf sadrži 5 vrhova, označeni su slovima P, Q, R, S i T. Sjecište "dužina" QT i PS nije vrh grafa na slici.

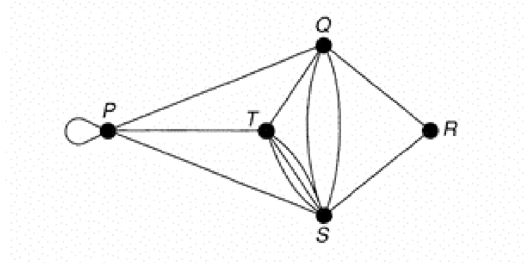


Definicija 2

Neka su U i V vrhovi grafa G. Ako u G postoji $e = \{U, V\}$ brid između njih kažemo da su vrhovi U i V **susjedni** te da je vrh U (V) **incidentan** sa bridom e. Dva brida sa zajedničkim vrhom zovu se susjedni bridovi.

U ovom predavanju promatrat ćemo samo **jednostavne** grafove, odnosno nećemo dopuštati više različitih bridova između neka dva vrha (višestruke bridove) niti bridove koji spajaju neki vrh V sam sa sobom (petlje).

Primjer 2. Graf koji sadrži višestruke bridove i petlju.



Definicija 3
Graf u kojemu je svaki par vrhova spojen bridovima naziva se **potpun graf**.

Potpun graf s n vrhova označavamo s K_n.

Definicija 4
Stupnjem vrha V zovemo broj bridova incidentnih s vrhom V (broj bridova koji iz njega izlaze ili broj vrhova koji su susjedni s njim) i označavamo ga s $d(V)$. Vrh je **izoliran** ako je stupnja 0.

Grafički, stupanj vrha V je broj bridova koji izlaze iz njega.

Teorem 5 (Lema o rukovanju)
Zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu je paran.

Korolar 6
Broj vrhova s neparnim stupnjem je paran.

Definicija 7
Šetnja u grafu je niz vrhova u kojemu je svaki vrh (osim prvoga) susjedan sa svojim prethodnikom u nizu, a **put** je šetnja u kojem nema ponavljanja vrhova. **Ciklus** je niz vrhova u kojemu su svaka dva uzastopna povezana i svi osim prvog i zadnjeg su različiti.

Definicija 8
Graf je **povezan** ako između svaka dva vrha tog grafa postoji neki put. Ako graf nije povezan možemo ga rastaviti na komponente povezanosti.

Definicija 9
Graf je **bipartitan** ako mu čvorove možemo odvojiti u dva skupa (particije) tako da ne postoji brid koji povezuje dva vrha iz istog od ta dva skupa.

Drugim riječima, bipartitnom grafu možemo čvorove obojiti u crno i bijelo tako da svaki brid povezuje čvorove različite boje.

Teorem 10

Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži ciklus neparne duljine.

Dokaz. Neka su A i B skupovi u koje particioniramo bipartitan graf.
Pretpostavimo prvo da je graf bipartitan, odnosno takvi skupovi postoje. Pretpostavimo da postoji neparan ciklus $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, k neparan, i bez smanjenja općenitosti neka je $v_0 \in A$. Sada je $v_1 \in B$, $v_2 \in A$, ..., $v_k \in B$, no $v_0 = v_k$ jer je to ciklus. Time je dobivena kontradikcija.
Obratno, neka graf nema neparnih ciklusa. Možemo pretpostaviti da je graf povezan, inače se dokaz provodi za svaku komponentu povezanosti zasebno. Konstruiramo skupove A i B: odaberemo neki vrh v i sve dok nismo "pokupili" sve vrhove, v stavimo u A, prve susjede svih vrhova iz A stavljamo u B, a prve susjede svih vrhova iz B stavljamo u A. Taj algoritam mora stati jer je graf konačan i povezan. Pretpostavimo da je neki vrh w u oba skupa A i B. To znači da imamo šetnju neparne duljine koja počinje i završava u w, ondnosno iz v u w smo na jedan način mogli doći u parno mnogo koraka, a na drugi način u neparno mnogo koraka (jer je $w \in A$ i $w \in B$). Ali time dobivamo kontradikciju jer smo pretpostavili da graf nema neparnih ciklusa. $\square$

Definicija 11

Šetnju koja sadrži sve bridove točno jednom (svi bridovi su posjećeni točno jednom) zovemo **Eulerova staza**, a ako ta šetnja počinje i završava u istom čvoru nazivamo ju **Eulerova tura**. **Eulerov graf** je graf u kojem postoji Eulerova tura.

S Eulerovim grafovima sigurno ste se sreli u problemima crtanja raznih oblika (koji su zapravo bili grafovi) bez podizanja olovke s papira.

Definicija 12

Povezani graf koji ne sadrži cikluse zove se **stablo**. Graf u kojemu je svaka komponenta povezanosti stablo zovemo **šumom**. Vrh u stablu stupnja 1 zove se **list**.

Klasičan primjer vizualizacije stablom je prikaz obiteljskog stabla.

Teorem 13

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- Graf je stablo.
- Graf nema ciklusa i dodavanjem brida dobije se ciklus.
- Graf je povezan i micanjem brida prestaje biti povezan.
- Graf je povezan i ima jedan brid manje nego čvorova.
- Između svaka 2 čvora u grafu postoji jedinstven put.

Definicija 14

Sparivanje u grafu $G = (V, E)$ je podskup bridova $S \subseteq E$ takav da je svaki vrh incidentan najviše s jednim bridom iz S. Vrhove incidentne s bridom iz S zovemo **zasićenim**, a u suprotnom **nezasićenim**. Sparivanje koje zasićuje sve vrhove zovemo **savršenim sparivanjem**.

Teorem 15 (Hall's Marriage Theorem)
Neka je G bipartitan graf s biparticijom $V = X \cup Y$. Za skup vrhova $A \subseteq V$ označimo s $N(A)$ skup svih vrhova susjednih nekom vrhu iz A. Graf G dopušta sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X ako i samo ako vrijedi uvjet $|N(A)| \geq |A|$ za svaki $A \subseteq X$.

Primjer 3. Pretpostavimo da imamo 6 darova koje želimo podijeliti petero prijatelja (svakome po jedan), pri čemu za svaku osobu znamo koje od darova želi dobiti. Možemo li podijeliti darove tako da svatko dobije dar koji želi?

Lakši zadaci

1. Koliko bridova ima potpun graf sa n vrhova?

2. Dokaži Teorem 5 i Korolar 6.

3. Dokažite da u grupi od 50 ljudi postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj prijatelja unutar te grupe.

4. Koji je najveći broj vrhova u grafu koji ima 19 bridova i u kojemu je stupanj svakog vrha barem 3?

5. Je li moguće umrežiti 77 računala tako da je svako računalo direktno povezano sa točno 15 drugih računala?

6. Dokažite da je graf sa n vrhova kojima je stupanj najmanje $\dfrac{n-1}{2}$ nužno povezan.

7. Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?

Ozbiljnija primjena

8. Neka je X skup prvih 100 prirodnih brojeva. Dokaži da je svakom 30-članom podskupu S od X moguće dodati još jedan element iz X na način da su svi dobiveni 31-člani podskupovi međusobno različiti.

9. Na natjecanju sudjeluje 300 natjecatelja. Svaka dva natjecatelja se međusobno ili poznaju ili ne poznaju, a ne postoje tri natjecatelja koji se svi međusobno poznaju. Odredi najveću moguću vrijednost broja n tako da vrijede sljedeći uvjeti:
• Svaki natjecatelj poznaje najviše n ostalih natjecatelja.
• Za svaki prirodni broj m takav da je $1 \leqslant m \leqslant n$ postoji barem jedan natjecatelj koji poznaje točno m ostalih natjecatelja.

10. U jednom gradu je M ulica i N trgova, pri čemu su M i N prirodni brojevi takvi da je $M > N$. Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi kroz druge trgove. Građani žele promijeniti izgled grada. Ove godine svaka će ulica biti po prvi put obojena crveno ili plavo. Dogovoreno je da se svake godine odabere jedan trg, te svim ulicama koje vode do tog trga istovremeno promijeni boja iz plave u crvenu i obratno. Dokaži da građani mogu odabrati boje ulica tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da sve ulice budu iste boje.

11. U nekoj državi između svaka dva grada postoji ili izravna autobusna ili izravna željeznička veza (sve veze su dvosmjerne i ne prolaze ni kroz jedan drugi grad). Dokaži da je gradove u toj državi moguće rasporediti u dva disjunktna skupa tako da je sve gradove u jednom skupu moguće obići putujući samo željeznicom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput, a sve gradove u drugom skupu putujući samo autobusom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput.

12. U nekoj zemlji postoji barem 101 grad. Glavni grad te zemlje spojen je sa 100 gradova izravnim (dvosmjernim) zrakoplovnim linijama. Svaki grad osim glavnog grada spojen je s 10 drugih gradova. Poznato je da se iz bilo kojeg grada može doći u bilo koji grad unutar te države. Dokažite da je moguće zatvoriti polovicu zrakoplovnih linija glavnog grada tako da se sačuva svojstvo da se iz svakog grada može doći u bilo koji drugi grad.

Hintovi

1. S koliko je drugih vrhova spojen svaki vrh?

2. Promotri kako bridovi utječu na zbroj svih stupnjeva.

3. Koje su sve mogućnosti za broj prijateljstava neke osobe?

4. Iskoristi $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot (\text{broj bridova})$.

5. Modeliraj situaciju kao graf i iskoristi Lemu o rukovanju.

6. Pretpostavi da takav graf nije povezan.

7. Ispitaj slučajeve po stupnjevima vrhova.

8. Iskoristi Hallov teorem.

9. Može li tražena vrijednost biti 201?

10. Promatrajte parnost transformacija ili cikluse u grafu.

11. Odvojite gradove koje možete obići samo autobusom i one koje možete obići samo željeznicom i promatrajte par najvećih takvih skupova. Što ako oni ne obuhvaćaju sve gradove?

12. Promatraj situaciju koja nastane ako ukloniš glavni grad i linije iz njega.

Rješenja

1. Svaki od n vrhova povezan je sa svakim od preostalih $n-1$ vrhova, a budući da tako svaki brid prebrojavamo točno 2 puta, ukupni broj bridova je $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

2. Svaki brid pridonosi zbroju stupnjeva svih vrhova sa 2 budući da spaja 2 vrha pa svakome od njih povećava stupanj za 1. Zbog toga je $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot (\text{broj bridova})$, odnosno paran broj.

Kada bi broj vrhova s neparnim stupnjem bio neparan ukupna suma stupnjeva svih vrhova u grafu bila bi neparna, što nije moguće po teoremu 5 kojeg smo pokazali.

3. Svaku osobu možemo zamisliti kao vrh grafa, a prijateljstva kao bridove među njima. Zadatak je pokazati da postoje barem 2 vrha istog stupnja.
Budući da imamo 50 vrhova, svaki od njih može biti stupnja najmanje 0 i najviše 49 (ukupno 50 mogućnosti). Međutim ne možemo istovremeno imati vrh koji je povezan sa svima ostalima (stupnja 49) i vrh koji nije povezan ni sa kojim drugim (stupnja 0) pa vidimo da imamo najviše 49 različitih mogućnosti za stupnjeve svakog vrha. Po Dirichletovom principu sigurno postoje barem 2 vrha istog stupnja.
Tvrdnja se analogno može pokazati za proizvoljan broj vrhova n.

4. Iz $3 \cdot (\text{broj vrhova}) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot (\text{broj bridova})$ dobivamo ocjenu $(\text{broj vrhova}) \leq 12$, a vidimo i da je jednakost moguće postići konstruiranjem takvog grafa.

5. Zamislimo to kao graf pri čemu su računala vrhovi grafa, a njihova povezanost bridovi. Kada bi traženi graf postojao, svaki od 77 vrhova morao bi biti stupnja točno 15 pa bi zbroj stupnjeva svih vrhova bio $77 \cdot 15$ što nije paran broj. Zato zaključujemo da to nije moguće.

6. Pretpostavimo suprotno, graf nije povezan. Tada postoje 2 vrha koja nisu povezana te svaki od njih ima barem $\frac{n-1}{2}$ susjednih vrhova i oni su različiti jer bi inače postojao put između ta dva vrha za koje smo pretpostavili da nisu povezani. Tada imamo ukupno barem $2 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n+1$ vrhova, što je kontradikcija.

7. državno 2011, SŠ1A, 5. zadatak

8. Neka je $G = (V, E)$ graf kojemu su vrhovi 30-člani i 31-člani podskupovi zadanog skupa X, a bridovi neka označavaju svojstvo podskupa (vrhovi U_1 i U_2 su povezani ako je $U_1 \subseteq U_2$ ili $U_2 \subseteq U_1$). Primijetimo da je tada skup vrhova particioniran na V_{30} (vrhove koji predstavljaju 30-člane podskupove) i V_{31} (vrhove koji predstavljaju 31-člane podskupove). Tvrdnja zadatka je da postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz V_{30}. Provjerom uvjeta Hallovog teorema slijedit će tvrdnja.
Promatramo proizvoljnih k vrhova iz V_{30} - svaki od njih je stupnja je 70. Tako vidimo da je ukupan broj bridova koji izlaze iz V_{30} jednak $70k$. S druge strane, svaki vrh iz V_{31} incidentan je s 31 vrhom iz V_{30}, pa je broj susjeda promatranih k vrhova barem $\frac{70k}{31} > k$.

9. državno 2018, SŠ4A, 5. zadatak

10. državno 2017, SŠ2A, 5. zadatak

11. državno 2015, SŠ3A, 3. zadatak

12. Turnir gradova 1982.
Skica rješenja:
Neka vrhovi grafa označavaju gradove, a bridovi zrakoplovne linije. Neka je A glavni grad, $B_1, \ldots, B_{100}$ gradove direktno povezane sa glavnim gradom i $C_1, \ldots$ ostali gradovi u toj državi. Sada su svi vrhovi stupnja 10, osim A koji je stupnja 100. Uklonimo li vrh A i njemu incidentne bridove, ostaju nam vrhovi $B_1, \ldots, B_{100}$ stupnja 9 i $C_1, \ldots$ stupnja 10. Svaki vrh B_i povezan je s barem još jednim vrhom istog stupnja, inače bismo dobili graf sa samo jednim vrhom neparnog stupnja. Zato možemo svakom takvom vrhu stupnja 9 koji je povezan s barem još jednim takvim dodati brid koji ga povezuje s A, a ostalima iz komponente povezanosti ne dodajemo brid koji ga povezuje s A jer su sa A povezani preko vrha kojemu smo dodali brid. Dodavanja bridova bit će najviše 50 jer je svaki vrh stupnja 9 povezan s barem još jednim vrhom stupnja 9 kojemu nećemo dodati brid. To znači da barem 50 od 100 zrakoplovnih linija iz glavnog grada možemo ukinuti, a da se sačuva svojstvo povezanosti.