



Uvod

Cilj ovog predavanja je proći kroz neka osnovna svojstva djeljivosti kojim se često rješavaju zadatci. Krenimo od osnovnog teorema koji se tiče djeljivosti, a zapravo je samo formalan zapis dijeljenja kojeg uobičajno koristimo.

Teorem 1

Za svaki prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r tako da je $b = qa + r$ i $0 \leq r < a$, uz $r = 0$ ako i samo ako $a|b$.

Drugim riječima, ovaj teorem nam omogućava da svakom dijeljenju pridružimo jedinstveni količnik i ostatak. Pogledajmo sad na nekoliko primjera neka osnovna svojstva djeljivosti.

Primjer 1. Dokažite da za cijele brojeve x i y vrijedi $17|2x + 3y$ ako i samo ako $17|9x + 5y$.

Rješenje. Ako vrijedi $17|2x + 3y$ onda je i $17|12(2x + 3y) = 24x + 36y$, pa stoga i $17|(24x + 36y) - 17x - 34y = 7x + 2y$. Sad imamo $17|2x + 3y$ i $17|7x + 2y$, pa onda znamo da 17 dijeli i njihov zbroj pa je $17|(2x + 3y) + (7x + 2y)$, odnosno $17|9x + 5y$. Slično se može pokazati i suprotni smjer. $\triangleleft$

Bitno je uočiti da smo iskoristili svojstvo da ako su neki brojevi djeljivi s istim brojem, onda su i sve njihove linearne kombinacije djeljive s istim brojem.

Primjer 2. Pronađite maksimalni prirodan broj n za kojeg vrijedi $n + 10|n^3 + 100$.

Rješenje. Iskoristimo dijeljenje polinoma kako bi dobili izraz

$$n^3 + 100 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 900.$$

Slijedi da $n + 10$ mora dijeliti ostatak 900, što znači da je $900 \geq n + 10$, odnosno $n \leq 890$. Vidimo da $n = 890$ zaista i zadovoljava uvjet. $\triangleleft$

Primjetimo da je iskorišteno svojstvo da je djelitelj nužno manji ili jednak djeljeniku (u slučaju prirodnih brojeva), što iako dosta očito svojstvo, zna biti korisno. Djeljenje polinoma također zna poslužiti u zadacima ovog tipa.

Definicija 2

Najveći zajednički djelitelj dva prirodna broja a, b je najveći broj koji dijeli oba broja i označavamo ga s $\gcd(a, b)$. Slično, najmanji zajednički višekratnik je najmanji broj koji je višekratnik oba broja i označavamo ga s $\text{lcm}(a, b)$. Za dva broja a i b koji imaju najveći zajednički djelitelj 1 kažemo da su relativno prosti.

Sad možemo navesti teorem koji ćemo često koristiti.

Teorem 3

(Euklidov algoritam). Za cijele brojeve a i b vrijedi

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a)$$

Primjer 3. Odredite $\gcd(110, 490)$.

Rješenje. Primjenom Euklidovog algoritma nekoliko puta imamo

$$\gcd(110, 490) = \gcd(110, 490 - 4 \cdot 110) = \gcd(110, 50) = \gcd(110 - 2 \cdot 50, 50) = \gcd(10, 50) = 10$$

◁

Primjer 4. Dokažite da je razlomak

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

neskrativ.

Rješenje. Pokazat ćemo da je zajednički djelitelj nazivnika i brojnika jednak 1 primjenom Euklidovog algoritma. Imamo

$$\gcd(21n + 4, 14n + 3) = \gcd(7n + 1, 14n + 3) = \gcd(7n + 1, 1) = 1$$

◁

Zadnji i možda najvažniji teorem koji ćemo navesti je

Teorem 4

(Osnovni teorem aritmetike). Svaki prirodni broj $n \geq 2$ ima jedinstveni rastav na proste brojeve.

Pogledajmo kako nam ovaj teorem omogućava lagano rješavanje sljedećeg primjera.

Primjer 5. Pokažite da za dva prirodna broja a i b vrijedi $\gcd(a, b)\text{lcm}(a, b) = ab$.

Rješenje. Pogledajmo rastav ova dva broja na proste faktore. Neka je $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$ i $b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}$, gdje su eksponenti nenegativni cijeli brojevi, a p_i -jevi međusobno različiti. S ovim zapisom imamo da je

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(e_1, f_1)} p_2^{\min(e_2, f_2)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)}$$

$$\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)}$$

odakle direktno množenjem slijedi tvrdnja zadatka jer je $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.

◁

Zadaci

1. Odredite sve prirodne brojeve d takve da postoji cijeli broj n za koji d dijeli i $n^2 + 1$ i $(n + 1)^2 + 1$.
2. Neka su a, b, c, d cijeli brojevi za koje vrijedi $a - c | ab + cd$. Pokažite da vrijedi $a - c | ad + bc$.
3. Odredite sve cijele brojeve n za koje $n^2 + 2n + 2$ dijeli izraz $n^3 + 4n^2 + 4n - 14$.
4. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ međusobno različiti cijeli brojevi takvi da postoji cijeli broj x za koji vrijedi

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2n}) = (-1)^n (n!)^2$$

Pokažite da vrijedi

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{2n}.$$

5. Neka su a, b prirodni brojevi za koje vrijedi niz relacija

$$a | b^2, \quad b^2 | a^3, \quad a^3 | b^4, \dots$$

Dokažite da je $a = b$.

6. Brojevi 101, 104, 109, 116, itd. su oblika $a_n = 100 + n^2$ za prirodne brojeve n . Neka je $d_n = \gcd(a_n, a_{n+1})$. Odredite maksimalnu vrijednost d_n .

7. Neka je $T_n = 2^{2^n} + 1$ za neki prirodni broj n . Dokažite da ako je $n \neq m$ onda je $\gcd(T_m, T_n) = 1$.

8. Dokažite da je $a^n | b^n$ ako i samo ako $a | b$.

9. Pokažite da za prirodne brojeve a, b, c vrijedi

$$\text{lcm}(a, b, c) = \frac{abc \gcd(a, b, c)}{\gcd(a, b) \gcd(b, c) \gcd(c, a)}.$$

10. Odredite sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$3^{n-1} + 5^{n-1} | 3^n + 5^n.$$

11. Dokažite da za prirodne brojeve a, m, n vrijedi

$$\gcd(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\gcd(m, n)} - 1.$$

Teži zadaci

12. Pokažite da je za neparan prosti broj p i relativno proste prirodne brojeve a, b najveći zajednički djelitelj od $a + b$ i $\frac{a^p + b^p}{a + b}$ jednak ili 1 ili p .

13. Odredite sve prirodne brojeve a, b tako da su izrazi

$$\frac{a^2 + b}{b^2 - a} \text{ i } \frac{b^2 + a}{a^2 - b}$$

cijeli brojevi.

14. Odredite prirodne brojeve a, b takve da vrijedi

$$ab^2 + b + 7 | a^2b + a + b.$$

15. Neka su $n > 1$ prirodan i p prost broj. Ako vrijedi $p | n^3 - 1$ i $n | p - 1$ dokažite da je $4p - 3$ potpuni kvadrat.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.