S2	Seniori grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2021./22.

Trigonometrija

Josip Pupić

13.11.2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Teorem 1

(Osnovno svojstvo)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Teorem 2

(Sinusov poučak) U trokutu ABC vrijedi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Teorem 3

(Kosinusov poučak) U trokutu ABC vrijedi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Teorem 4

(Dvostruki sinus i kosinus)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Teorem 5

(Kut između tetive i tangente) Neka je K kružnica i AB neka njezina tetiva. Neka je t tangenta na kružnicu K koja prolazi kroz B. Tada je kut između tangente t i tetive AB jednak obodnom kutu nad tetivom AB u kružnici K.

Teorem 6

(Potencija točke) Neka točkom T izvan kružnice K prolazi pravac p koji siječe K u A i B, pravac q koji siječe K u C i D te pravac r koji je tangenta kružnice K i dodiruje ju u E. Vrijedi:

$$TA \cdot TB = TC \cdot TD = TE^2$$

Zadaci

1. Dokažite teorem o potenciji točke.

2. Neka se kružnice K_1 i K_2 sijeku u točkama M i N. Dokažite da proizvoljna točka T na pravcu MN ima jednaku potenciju točke na kružnice K_1 i K_2.

3. Dokažite da je površina trokuta ABC jednaka $\frac{ab\sin\gamma}{2}$.

4. Riješite jednadžbu $\sqrt{17 - 7\sin 2x} = 3\cos x - 5\sin x$.

5. Dokažite da za sve α, β i $\gamma \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq 1$$

6. Neka je točka M polovište stranice AB trokuta ABC. Dokažite da je umnožak radijusa opisane kružnice trokuta AMC i visine iz M na AC, jednak umnošku radijusa opisane kružnice trokuta BMC i visine iz M na BC.

7. 2 kružnice K_1 i K_2 polumjera r_1 i r_2, sijeku se u točkama A i B, a jedna njihova zajednička tangenta ih siječe redom u točkama C i D. Neka je N točka presjeka pravaca AB i CD, pri čemu je B između A i N. Izračunajte omjer visina iz vrha N u trokutima NAD i NAC.

8. Za površinu S trokuta ABC i polumjer R njegove opisane kružnice, vrijedi $S \geq R^2$. Dokažite da su svi kutevi trokuta ABC veći od 30, a manji od 90 stupnjeva.

9. Dokažite da u svakom trokutu postoji težišnica čiji je kvadrat duljine bar $\sqrt{3}$ puta veći od površine trokuta.

Više zadataka možete pronaći na `www.skoljka.org`.

Rješenja

1. Vidi [1, zad. taj i taj] (u uglate zagrade moze i stranica, poglavlje, odjeljak i slicno).

2. Link na rješenje.

3. Kvadriranjem zadane jednadžbe dobivamo

$$17(\cos^2 x + \sin^2 x) - 7\sin 2x = 9\cos^2 x - 30\sin x\cos x + 25\sin^2 x \qquad \Rightarrow \qquad 8\cos^2 x + 8\sin 2x - 8\sin^2 x,$$

pri čemu smo koristili $sin 2x = 2\sin x\cos x$. Uvrštavanjem identita $\cos 2x = \cos^2 x \sin^2 x$ slijedi $8(\cos 2x + \sin 2x) = 0$, a onda jednostavno

4. Koristeći svojstva apsolutne vrijednosti te $\sin\gamma \leq 1$ i $\cos\gamma \leq 1$ imamo

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &\leq |\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| \\ &\leq |\sin\alpha||\sin\beta||\sin\gamma| + |\cos\alpha||\cos\beta||\cos\gamma| \\ &\leq |\sin\alpha||\sin\beta| + |\cos\alpha||\cos\beta|\end{aligned}$$

Za brojeve $\alpha + 2k\pi,\ \pi - \alpha + 2k\pi,\ \alpha - \pi + 2k\pi,\ -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, vrijedi da su njihove vrijednosti sinusa i kosinusa jednake po apsolutnoj vrijednosti. Stoga, za promatrani $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji jedinstven α' takav da je $0 \leq \alpha' < 2\pi$, $\sin\alpha' = |\sin\alpha|$ i $\cos\alpha' = |\cos\alpha|$. Analogno vrijedi i za β pa je zato

$$|\sin\alpha||\sin\beta| + |\cos\alpha||\cos\beta| = \sin\alpha'\sin\beta' + \cos\alpha'\cos\beta' = \cos(\alpha' - \beta') \leq 1.$$

5. Neka su r_1 i r_2 redom radijusi kružnica opisanih trokutima AMC i BMC. Neka je $\angle CAB = \alpha$ i $\angle ABC = \beta$. Iz sinusovog poučka na trokutima AMC i BMC zaključujemo $r_1 = \frac{CM}{2\sin\alpha}$ i $r_2 = \frac{CM}{2\sin\beta}$. Neka su U i V redom nožišta visina iz M na AC i BC.Tada iz pravokutnih trokuta AMU i MBV dobivamo $MU = AM\sin\alpha = \frac{AB}{2}\sin\alpha$ te $MV = MB\sin\beta = \frac{AB}{2}\sin\beta$. Korištenjem ranije dobivenih jednakosti slijedi

$$\begin{aligned}r_1 \cdot MU &= \frac{CM}{2\sin\alpha} \cdot \frac{AB}{2}\sin\alpha = \frac{CM \cdot AB}{4}, \\ r_2 \cdot MV &= \frac{CM}{2\sin\beta} \cdot \frac{AB}{2}\sin\beta = \frac{CM \cdot AB}{4}.\end{aligned}$$

6. Promotrimo najprije potenciju točke N s obzirom na kružnice K_1 i K_2. Kako je AB njihova zajednička tetiva, zaključujemo

$$NC^2 = NB \cdot NA = ND^2 \qquad \Rightarrow \qquad NC = ND.$$

Neka je F nožište visine v_1 iz vrha N u trokutu NCA. Uz oznaku $\angle NCA = \alpha$, iz tokuta NCF dobivamo $v_1 = NC \cdot \sin\alpha$. Analogno slijedi $v_2 = ND \cdot \sin\beta$, pri čemu je $\beta = \angle NDA$, a v_2 visina iz vrha N u trokutu NDA. Za traženi omjer stoga vrijedi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Nadalje, neka su S_1 i S_2 redom središta kružnica K_1 i K_2. U jednakokračnom trokutu ACS_1 označimo s E nožište visine iz S_1. Tada je trokut S_1EC pravokutan i vrijedi $CE = \frac{AC}{2}$ te $\angle CS_1E = \frac{1}{2}\angle AS_1C$. Po poučku o kutu između tetive i tangente, znamo da je kut $\angle NCA$, jednak obodnom kutu nad tetivom AC. No, kako je središnji kut dvostruko veći od obodnog, zaključujemo $\angle CS_1E = \alpha$. Zato je $\frac{AC}{2} = r_1 \cdot \sin\alpha$. Analogno dobivamo $\frac{AD}{2} = r_2 \cdot \sin\beta$. Sada slijedi

$$\frac{AC}{AD} = \frac{2r_1\sin\alpha}{2r_2\sin\beta} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

S druge strane, po sinusovom poučku u trokutu ACD vrijedi

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{AC}{AD} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Izjednačavanjem dobivenih dvaju izraza za $\frac{AC}{AD}$ slijedi

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

7. Po sinusovom poučku znamo $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{a}{sin\beta} = \frac{a}{sin\gamma} = 2R$. Koristeći to i formulu za površinu trokuta, dobivamo

$$S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Budući da vrijedi $S \geq R^2$, slijedi $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \geq \frac{1}{2}$. Budući da je vrijednost sinusa kuteva trokuta između 0 i 1, te jednaka 1 samo za pravi kut, a trokut ne može sadržavati 2 takva, zaključujemo da je sinus svakog kuta promatranog trokuta veći ili jednak $\frac{1}{2}$, odnosno $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 30^o$.
Pretpostavimo sada da je trokut tupokutan, odnosno neka je $\gamma > 90^o$. Tada je $\sin\gamma < 1$ i $\alpha + \beta < 90^o$, odakle slijedi $\beta < 90^o - \alpha$. Zbog $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \geq \frac{1}{2}$ zaključujemo

$$\frac{1}{2} < \sin\alpha\sin\beta < \sin\alpha\sin\left(90^o - \alpha\right) = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} \leq \frac{1}{2},$$

što je kontradikcija. Iz toga slijedi tvrdnja zadatka.

8. Bez smanjenja općenitosti, neka je BC najkraća stranica trokuta, odnosno neka je kut α pri vrhu A najmanji kut u trokutu ABC. Tada je jasno da je $\alpha \leq 60^o$. Uz standardne oznake $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$, neka je m duljina težišnice iz vrha A. Kako je DF srednjica, ona je paralelna stranici AC i zato je $\angle AFD = 180^o - \alpha$. Kosinusovim poučkom na trokutu AFD dobivamo

$$m^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\cos\angle AFD = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{bc}{2}\cos\alpha \geq \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{bc}{2}\cos 60^o = \frac{b^2+c^2+bc}{4} \geq \frac{3bc}{4},$$

pri čemu u zadnjem koraku koristimo A-G nejednakost, a prije toga činjenicu da je kosinus padajuća funkcija na intervalu $[0^o,\ 90^o]$
S druge strane, sinus je rastuća funkcija na tom intervalu pa znamo da za površinu trokuta ABC vrijedi

$$P = \frac{bc\sin\alpha}{2} \leq \frac{bc}{2}\sin 60^o \leq \frac{\sqrt{3}bc}{4},$$

pa iz toga i ranije nejednakosti $m^2 \geq \frac{3bc}{4}$ zaključujemo $m^2 \geq P$.

Literatura

[1] Arthur Engel. *Problem-solving strategies.* Springer, 1998. URL: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwj5xfOn8_LrAhVtk4sKHSwLBJMQFjABegQIAxAB&url=http%3A%2F%2Fgimnazija-izdijankoveckoga-kc.skole.hr%2Fupload%2Fgimnazija-izdijankoveckoga-kc%2Fmultistatic%2F748%2FProblem-Solving_Strategies_Engel.pdf&usg=AOvVaw3L_vJWQDJBEZrFek8uMfL7.