

Uvod

Definicija 1

Niz u skupu S je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ s pravilom pridruživanja $f(n) = a_n$, $a_n \in S$.

Možemo zamisliti niz i kao listu od beskonačno mnogo brojeva: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
Ponekad se u zadacima niz definira kao funkcija iz $\mathbb{N}_0$, tj. $a_0, a_1, a_2, \dots$

Definicija 2

Element a_n nazivamo **općim članom** niza. Sam niz označavamo s (a_n) ili $\{a_n\}$.

Opći član niza je najčešće dan rekurzivno (preko ostalih članova niza) ili općom formulom. Za dokazivanje opće formule niza je korisna metoda matematičke indukcije.

Definicija 3

Niz (a_n) zovemo **aritmetičkim** ako je $a_n - a_{n-1} = d$ za svaki $n \geq 2$ i konstantu $d \in \mathbb{R}$. Broj d se još zove i **razlika** ili **diferencija** aritmetičkog niza.

Niz (a_n) zovemo **geometrijskim** ako je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ za svaki $n \geq 2$ i konstantu $q \in \mathbb{R}$. Broj q se još zove i **kvocijent** geometrijskog niza.

Lema 4

Opća formula aritmetičkog niza s diferencijom d jest $a_n = a_1 + (n-1)d$, a geometrijskog niza s kvocijentom q jest $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Dokaz leme ostavljam vama za vježbu.

Primjer 1. Izrazi formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkog i geometrijskog niza.

Rješenje. Iz opće formule aritmetičkog niza imamo

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (a_1 + (i-1)d) = n \cdot a_1 + d \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

što uz malo algebarske manipulacije postane

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Za geometrijski niz imamo

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_1 q^{i-1} = a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

gdje zadnji korak slijedi iz faktorizacije $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

◁

Definicija 5

Niz za čija svaka dva susjedna člana vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$ nazivamo **uzlaznim** (rastućim). Ako nikad ne vrijedi jednakost, kažemo da je niz strogo rastući.

Niz za čija svaka dva susjedna člana vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$ nazivamo **silaznim** (opadajućim). Ako nikad ne vrijedi jednakost, kažemo da je niz strogo opadajući.

Kažemo da je niz **monoton** ako je ili uzlazan ili silazan. Slično definiramo strogo monoton niz.

Zadaci s nizovima dolaze u svakakvim oblicima te koriste razne metode rješavanja, poput standardnih nejednakosti, indukcije, kongruencija, itd.

Teleskopiranje je metoda kojom računamo zbroj n članova nekog niza zapisivanjem opće formule niza na drugačiji, "pametniji" način kako bismo olakšali zbrajanje. Najčešće to činimo racionalizacijom ili razdvajanjem na jednostavnije dijelove/razlomke.

Primjer 2. Izračunaj zbroj

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$

(Županijsko natjecanje iz matematike 2017., 1. razred, A varijanta)

Rješenje. Ovaj zadatak možemo interpretirati kao zbroj prvih 100 članova niza s općom formulom $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ za $n \in \mathbb{N}$. Racionaliziramo li nazivnik, imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2 - n^2(n+1)} = \\ &= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

što je puno jednostavniji oblik nego početni. Sada je

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+1}} \right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

što pregrupiranjem zagrada postaje

$$1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

U našem zadatku je $n = 100$ pa je traženi zbroj jednak $1 - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}$.

◁

Zadaci

1. Nađi opću formulu niza $(x_n)_{n \geq 0}$ zadanog s $x_0 = 3, x_1 = 4$ i $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$ za $n \geq 1$.
2. Neka je (a_n) niz definiran rekurzivno s $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ za sve $n \geq 1$. Dokaži da je niz monoton te omeđen odozgo i odozdo.
3. Zadan je niz (a_n) takav da je $a_0 = 1, a_1 = 4$ i

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

za svaki prirodni $n \geq 2$. Dokaži da su svi članovi niza kvadrati prirodnih brojeva.

4. Neka je $a = \sqrt[2022]{2022}$ i neka je (a_n) niz takav da je $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a^{a_n}$ za $n \geq 1$. Nađi najmanji prirodni broj n takav da je $a_n \geq 2022$.
5. Neka je (a_n) niz zadan s $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$ za $n \geq 1$. Dokaži da je $\sum_{i=1}^n a_i < \frac{3}{4}$ za sve $n \geq 1$.

6. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ članovi aritmetičkog i $b_1, b_2, \dots, b_n$ članovi geometrijskog niza s pozitivnim članovima. Ako je $a_1 = b_1$ i $a_n = b_n$, dokažite da je suma članova aritmetičkog niza veća ili jednaka sumi članova geometrijskog niza.

7. Dan je niz pozitivnih realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \dots$ takvih da vrijedi

$$a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) \text{ za } n \geq 1.$$

Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$a_0 a_1 \dots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

8. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je zadan rekurzivno s $a_1 = 1$, $a_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} + 1$, za $n \geq 2$. Odredite najmanji realni broj M takav da je

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{a_n} < M$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$.

9. Mogu li brojevi 1, 2, ..., 100 biti članovi 12 geometrijskih nizova?

10. Za neki niz brojeva $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, definirajmo ΔA kao niz $\{a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots\}$. Ako je $a_{15} = a_{2021} = 0$ te ako je svaki član niza $\Delta(\Delta A)$ jednak 1, nađi a_1 .

11. Zadan je niz (x_n) s $x_1 = 2$ te

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1 \text{ za } n \geq 1.$$

Dokaži da je

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}}.$$

12. Neka je (a_n) bilo koji niz realnih brojeva za $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo niz (b_n) kao

$$b_n = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \text{ za sve } n \geq 1.$$

Dokaži da su sve vrijednosti $\lfloor \sqrt{b_n} \rfloor$ međusobno različite ($\lfloor x \rfloor$ označava najmanje cijelo broja x).

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Raspiši prvih nekoliko članova. Indukcija.
2. Indukcija. Prisjeti se definicije monotonosti.
3. Raspiši prvih nekoliko članova. Indukcija.
4. Raspiši prvih nekoliko članova. Indukcija.
5. Teleskopiranje.
6. Dovoljno je dokazati da je $a_i \geq b_i$ za svaki i .
7. Indukcija.
8. Teleskopiranje.
9. Promatraj proste brojeve u nizu.
10. Pokuša naći formulu općeg člana.
11. Teleskopiranje.
12. Dokaži jaču tvrdnju: $b_{n+1} \geq b_n + 1$.

Rješenja

1. Vidi [2, Introductory problems - 2. zadatak]

2. Prvo ćemo dokazati da je niz omeđen odozgo i odozdo: konkretno, da je $1 \leq a_n \leq 2$ za svaki $n \geq 1$. To radimo matematičkom indukcijom.

Baza: $n = 1$. Kako je $a_1 = 1$, $1 \leq a_1 \leq 2$ očito vrijedi.

Pretpostavimo da je $1 \leq a_k \leq 2$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada je $3 \leq a_k + 2 \leq 4$, to jest kad korjenujemo (to smijemo napraviti jer su svi dijelovi nejednakosti pozitivni): $\sqrt{3} \leq \sqrt{a_k + 2} \leq \sqrt{4}$. Kako je po rekursivnoj formuli niza $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2}$, slijedi

$$1 < \sqrt{3} \leq a_{k+1} \leq 2,$$

pa je korak indukcije završen i tvrdnja je dokazana.

Preostaje nam dokazati monotonost - to ćemo dokazati tako da dokažemo da je niz rastući.

Uvjet da je niz rastući jest $a_n \leq a_{n+1}$ za svaki $n \geq 1$, što je ekvivalentno s $a_n \leq \sqrt{2 + a_n}$. Kako su obje strane nejednakosti pozitivne, kvadriranjem se čuva ekvivalentnost pa nejednakost postaje $a_n^2 \leq 2 + a_n$, tj. nakon prebacivanja i faktorizacije $(a_n - 2)(a_n + 1) \leq 0$.

Izraz na lijevoj strani je ≤ 0 za $-1 \leq a_n \leq 2$, što vrijedi za svaki a_n prema prethodno dokazanoj omeđenosti. To znači da odnos $a_n \leq a_{n+1}$ zaista vrijedi za svaki $n \geq 1$ pa je ovaj niz rastuć, a time i monoton.

3. Općinsko 2020. A - 4.2

4. Županijsko 2015. A - 4.1

5. Pokušat ćemo teleskopirati sumu $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2+2i}$ tako da rastavimo razlomak $\frac{1}{i^2+2i}$ na jednostavnije dijelove.

Kako je $i^2+2i = i(i+2)$, možemo naći konstante $A, B \in \mathbb{R}$ takve da je $\frac{1}{i^2+2i} = \frac{A}{i} + \frac{B}{i+2}$ za svaki i , tj. $A(i+2) + Bi = 1$. Uvrštavanjem $i = -2$ i $i = 0$, dobivamo $A = \frac{1}{2}$ i $-B = \frac{1}{2}$, tj. $\frac{1}{i^2+2i} = \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+4}$.

Sada imamo da je

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+4} \right),$$

što nakon kraćenja većine članova postaje $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} < \frac{3}{4}$, što je i trebalo pokazati.

6. Županijsko 1999. - 4.5

7. Županijsko 2017. A - 4.3

8. Državno 2005. - 4.1

9. Vidi [1, 9. poglavlje, 53. zadatak]

10. Vidi [2, Introductory problems - 25. zadatak]

11. Vidi [2, Advanced problems - 59. zadatak]

12. Vidi [1, 9. poglavlje, 57. zadatak]

Literatura

- [1] A. Engel. *Problem-solving strategies*. Springer, 1998. URL: http://gimnazija-izdijankoveckoga-kc.skole.hr/upload/gimnazija-izdijankoveckoga-kc/multistatic/748/Problem-Solving_Strategies_Engel.pdf.
- [2] Z. Feng T. Andreescu. *101 problems in algebra*. AMT Publishing, 2001. URL: <https://mathematicalolympiads.files.wordpress.com/2012/08/101-problems-in-algebra.pdf>.