KAGH nejednakosti

J14	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2021./22.

Mateo Dujić

11. veljače 2022.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

Uvod

Ovo predavanje namijenjeno je za one koji prvi put vide nejednakosti, kao i one koji su nešto već vidjeli, ali ne misle da im nejednakosti idu od ruke. U prvom dijelu predavanja biti će obrađene osnovne nejednakosti za koje treba minimalno predznanje, a na njega se nadovezuju A-G i A-H nejednakost koje se iz metodičkih razloga predstavljaju najprije u dvije, a zatim u tri varijable. Predavanje je zamišljeno da se naprije da uvod, za $n = 2, 3$ pa zatim predstave KAGH nejednakosti za proizvoljan prirodan broj n, koje su najpoznatije i najkorištenije netrivijalne jednakosti u matematici općenito.

Osnovne (elementarne) nejednakosti

Teorem 1

Postoji mnogo trivijalnih činjenica koje su baza za dokazivanje nejednakosti. Neke od njih su sljedeće:

1. Ako $x \geq y$ i $y \geq z$, onda $x \geq z$, za svaki $x, y, z \in \mathbb{R}$
2. Ako $x \geq y$ i $a \geq b$, onda $x + a \geq y + b$, za svaki $x, y, a, b \in \mathbb{R}$
3. Ako $x \geq y$, onda $x + z \geq y + z$, za svaki $x, y, z \in \mathbb{R}$
4. Ako $x \geq y$ i $a \geq b$ onda $xa \geq yb$, za svaki $x, y \geq 0$ ili $a, b \geq 0$
5. Ako $x \in \mathbb{R}$ onda $x^2 \geq 0$, pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako $x = 0$.

Ove činjenice koristit ćemo u zadatcima i nije ih potrebno obrazlagati. Krenimo sa zadatcima.

1. Dokaži da za svaki realni broj $x > 0$, vrijedi sljedeća nejednakost

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dokaži nejednakost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

4. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dokaži nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

5. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dokaži nejednakosti

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

6. Neka su $x, y, z > 0$ realni brojevi takvi da $x + y + z = 1$. Dokaži da

$$\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}$$

7. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dokaži nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

8. Neka su $a, b, c > 1$ realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}$$

9. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Dokaži nejednakost

$$x^4 + y^4 + 4xy + 2 \geq 0$$

10. Dokaži da za proizvoljne realne brojeve x, y, z sljedeća nejednakost vrijedi

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$$

Nejednakosti među sredinama

Sljedeći teorem zove se A-G nejednakost.

Teorem 2

Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b$.

Primijenimo ovaj teorem na sljedeća tri zadatka.

11. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ takvi da $x + y + z = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 1$$

12. Neka su $x, y, z > 0$ realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0$$

13. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokaži nejednakost

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

Ovaj teorem govori nam o A-H nejednakosti.

Teorem 3

Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{a + b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b$.

Mi ćemo više koristiti sljedeći korolar ovog teorema:

Korolar 4

Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

A-H nejednakost može biti primijenjena na sljedećem zadatku.

14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Teorem koji slijedi nije ništa novo, opet A-G nejednakost, no s jednom varijablom više.

Teorem 5

Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b = c$.

15. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y + z = 1$. Dokaži nejednakost

$$xy + yz + zx \geq 9xyz$$

Isto tako, A-H nejednakost s 3 varijable:

Teorem 6

Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b = c$.

Izvedite analogan korolar kao i za 2 varijable.

16. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takvi da $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}}$$

18. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Dokaži nejednakost

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$$

19. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ takvi da $x + y + z = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2$$

20. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da $a+b+c+d=4$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

Konačno, dajemo potpuni iskaz nejednakosti među sredinama.

Teorem 7

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeće

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^n}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Za one koji žele više

21. (Ruska MO 2004) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. i $a+b+c=3$. Dokaži

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$$

22. (IMO Shortlist 1998) Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ i $xyz=1$. Dokaži

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+x)} \geq \frac{3}{4}$$

23. (USAMO 1998) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokaži

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Izmnoži obje strane s x jer $x > 0$.

2. Svedi na potpun kvadrat.

3. Hint je 2. zadatak.

4. Svedi na sumu kvadrata od tri člana.

5. Hint je 4. zadatak.

6. Hint je 5. zadatak.

7. Pokušaj primijeniti 4. zadatak.

8. Izraz je ekvivalentan izrazu $(a - \frac{1}{b})(b - \frac{1}{c})(c - \frac{1}{a}) > 0$.

9. Ideja je svođenje na potpun kvadrat.

10. Ideja kao u prethodnom zadatku.

11. Da bi se mogao primijeniti A-G na dva člana, napravi od 3 člana, 6 članova.

12. Definiraj nazivnike kao $a = y + z$, $b = z + x$ i $c = x + y$ pa izrazi cijeli izraz u terminima a, b i c.

13. Primijeni A-G unutar svake od zagrada.

14. Primijeni A-H nejednakost tako da svaki nazivnik razbijes na sumu dva člana, npr. $a+b+2c = (a+c)+(b+c)$.

15. Pomnoži izraz s $1 = x + y + z$ pa primijeni A-G nejedakost na svaku od zagrada.

16. Najprije A-H nejednakost, a zatim iskoristi 5. zadatak.

17. Najprije primijeni A-G nejednakost s 3 člana, a zatim 3 puta primijeni A-G nejednakost za 2 člana.

18. Uoči $1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} = \frac{2}{\sqrt{yz}}$.

19. Primijeni A-G nejednakost za 2 člana na brojnike.

20. Uoči $\frac{1}{a^2+1} = \frac{a^2+1-a^2}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2\sqrt{a^2}} = 1 - \frac{a}{2}$.

21. Iskoristi formulu za kvadrat trinoma. Pokušaj pametno primijeniti A-G.

22. Iskoristi A-G tako da svaki od sumanada kombiniras s drugim izrazima da se u produktu geometrijske sredine pokrate izrazi.

23. Uoči da je $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$.

Rješenja

Rješenja svih zadataka osim posljednja tri nalaze se u knjizi na prvom linku. Posljednja tri zadatka nalaze se u iz knjige na drugom linku.

1. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.1, str. 1
2. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.2, str. 2
3. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.3, str. 2
4. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.4, str. 2
5. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.5, str. 3
6. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.6, str. 3
7. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.7, str. 3
8. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.9, str. 4
9. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.13, str. 6
10. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.14, str. 6
11. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.1, str. 11
12. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.2, str. 11
13. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.3, str. 12
14. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.4, str. 12
15. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.5, str. 13
16. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.6, str. 13
17. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.7, str. 13
18. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.8, str. 14
19. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.9, str. 14
20. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.16, str. str. 18

1. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.1, str. 17
2. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.2, str. 18
3. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.7, str. 20