



Uvod

Za početak podsjetimo se kako idu nejednakosti među sredinama.

Teorem 1

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Tada vrijedi $K \geq A \geq G \geq H$, odnosno

$$\sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Jednakost se postiže ako i samo ako vrijedi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Sljedeći teoremi vezani su uz CSB nejednakost koja je uz KAGH najučestalija u zadacima s natjecanja.

Teorem 2

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su nizovi x_i te y_i proporcionalni (u slučaju da niti jedna varijabla nije jednaka nuli, to znači da postoji $\mu > 0$ takav da je $y_i = \mu x_i$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Dokaz. Promotrimo kvadratnu funkciju:

$$f(t) = (x_1 t + y_1)^2 + (x_2 t + y_2)^2 + \dots + (x_n t + y_n)^2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)t^2 + 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)t + (y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

Budući da je nenegativna, ima najviše jednu realnu nultčku pa je njena diskriminanta manja ili jednaka od nule, odnosno

$$4(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 - 4(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \leq 0$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. Slučaj jednakosti se postiže samo ako $f(t)$ postiže vrijednost 0. □

Teorem 3

Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ te $y_1, y_2, \dots, y_n > 0$. Tada vrijedi:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$$

Dokaz. Nejednakost se može zapisati kao

$$(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \right) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

što je direktna posljedica CSB nejednakosti. □

Ovakav oblik CSB nejednakosti naziva se Engel forma.

Definicija 4

Reći ćemo da je funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ homogena s koeficijentom homogenosti k ako za svaki $t \in \mathbb{R}, t \neq 1$ vrijedi $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Primjer 1. Funkcija $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2x+y}$ je homogena s koeficijentom 1 jer

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2tx + ty} = t \frac{x^2 + y^2}{2x + y} = tf(x, y)$$

Za nejednakost $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ćemo reći da je homogena ako je funkcija $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ homogena. Drugim riječima nejednakost je homogena ako su joj svi pribrojnici istog stupnja.

Primjer 2. Nejednakost $x^2 + y^2 + 2xy \geq z^2 + yz$ je homogena jer su joj svi pribrojnici stupnja 2. Nejednakost $a^5 + b^5 + 1 \geq 5ab(1 - ab)$ nije homogena jer su joj pribrojnici stupnjeva 5, 0, 4 i 2.

Primjetimo da su KAGH i CSB nejednakosti homogene pa njihovom uzastopnom primjenom možemo dobiti samo druge homogene nejednakosti. Zbog toga ako nejednakost nije homogena na početku moramo je homogenizirati. To ćemo najčešće moći postići nekim uvjetom koji je zadan u zadatku. Na primjer ponekad će biti zadano da nejednakost treba dokazati za sve $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takve da $abc = 1$. Sada upravo pomoću tog $abc = 1$ možemo naštimavati stupnjeve pribrojnika po volji kako bismo dobili homogenu nejednakost.

Ponekad će nejednakost biti homogena. Tada možemo postavljati sami svoje uvjete oblika $abc = 1$, $a + b + c = 1$, $ab + bc + ca = 1$ ili slično.

Primjer 3. Imamo nejednakost $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$. To je poznata Nesbittova nejednakost. (Dokažite je ako je niste vidjeli prije). Sada možemo zapisati $abc = k^3$ za neki $k \in \mathbb{R}$. Neka je $a = kx$, $b = ky$ i $c = kz$. Primjetimo da $abc = k^3xyz = k^3$. Iz ovog slijedi $xyz = 1$. Uvrstimo $a = kx$, $b = ky$ i $c = kz$ u početnu jednakost:

$$\begin{aligned} \frac{xk}{yk + zk} + \frac{yk}{xk + zk} + \frac{zk}{xk + yk} &\geq \frac{3}{2} \\ \iff \frac{x}{y + z} + \frac{y}{x + z} + \frac{z}{x + y} &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Sada vidimo da je dovoljno dokazati da nejednakost vrijedi za sve $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ za koje vrijedi $xyz = 1$ da bi se dokazalo i za sve $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Na sličan način možemo sami postavljati i druge slične uvjete kada imamo homogenu nejednakost. (Nesbitt se može dokazati i bez korištenja tog uvjeta, samo smo ga iskoristili primjera radi).

Pokazat ćemo još jednu korisnu nejednakost. Zove se Chebishevljeva nejednakost.

Teorem 5

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ takvi da $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Tada vrijedi:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)$$

Dokaz. Za sve $i, j \in 1, 2, \dots, n$ vrijedi

$$\begin{aligned} (a_i - a_j)(b_i - b_j) &\geq 0 \\ \iff a_ib_i + a_jb_j &\geq a_ib_j + a_jb_i \end{aligned}$$

Primjenom te tvrdnje za sve parove i i j dobije se tvrdnja. □

Primjetimo da možemo dobiti i varijaciju na Chebishevljevu nejednakost tako da ako imamo $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ takvi da $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ vrijedi

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)$$

. Tvrdnja se dokazuje analogno kao Chebishevljeva nejednakost.

Zadaci

1. Neka je $n \geq 3$ i neka su $a_2, a_3, \dots, a_n$ pozitivni realni brojevi te neka vrijedi: $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Dokaži da tada vrijedi:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n$$

.

2. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takvi da $abc \geq 1$. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} \leq 1$$

.

3. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Odredite minimalnu vrijednost izraza:

$$\frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}$$

.

4. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi:

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

.

5. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a + abc \leq 4$$

.

6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

.

7. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ takvi da vrijedi $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Dokažite da tada vrijedi:

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \dots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

8. Svakom vrhu pravilnog n -terokuta pridružen je po jedan realni broj tako da zbroj svih pridruženih brojeva iznosi 1. Označimo s A zbroj svih umnožaka brojeva pridruženim trima uzastopnim vrhovima. Odredi najveću moguću vrijednost broja A i odredi sve slučajeve u kojima se ta vrijednost postiže ako je:

(a) $n = 4$

(b) $n = 6$.

9. Odredi sve liste $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ nenegativnih realnih brojeva za koje su ispunjena sljedeća tri uvjeta (sva tri):

(a) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$

(b) $x_{2020} \leq x_1 + 1$

(c) postoji permutacija $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ liste $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ takva da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3$$

10. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takvi da vrijedi $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$. Dokažite da tada vrijedi:

$$a + b + c \geq ab + bc + ca$$

.

11. Neka su $a, b, c, d > 0$ realni brojevi takvi da je $abcd = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Želimo se riješiti eksponenata nad zagradama primjenom neke nejdnakosti.
2. Želimo svesti na zajednički nazivnik, ali na pametniji način od izmnožavanja.
3. Dodajte sa svake strane $3+4+5$.
4. Izmnožavanjem svedite na zajednički nazivnik.
5. Bez smanjenja općenitosti pretpostavite da je b srednji po vrijednosti.
6. Drukčije zapišite nejednakost tako da vam varijable pređu na drugu stranu.
7. Bez smanjenja općenitosti pretpostavite uređaj.
8. A-G.
9. A-G.
10. Krenite iz uvjeta.
11. CSB.

Rješenja

1. Za $\forall i \in \{2, \dots, n\}$ vrijedi:

$$(1 + a_i)^i = ((i-1) * \frac{1}{i-1} + a_i)^i \geq i^i * \frac{1}{(i-1)^{i-1}} * a_i$$

primjenom A-G nejednakosti. Primjenom te tvrdnje na svaku od zagrada dobivamo:

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n \geq 2^2 * a_2 + \frac{3^3}{2^2} * a_3 + \dots + \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} * a_n = n^n$$

Jednakost se posžiže kada $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$ vrijedi $a_i = \frac{1}{i-1}$, no tada umnožak $a_2 a_3 \dots a_n$ nije jednak 1, dakle jednakost se ne može postići pa uvijek mora vrijediti da je lijeva strana nejednakost strogo veća od n^n što je i trebalo dokazati.

2. Primjenom CSB nejednakosti imamo:

$$(1 + a + b)(c + 1 + 1) \geq (\sqrt{c} + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Sada proširavanjem naših razlomaka i primjenom analognih tvrdnji na svaki razlomak imamo:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} = \frac{c+1+1}{(1+a+b)(c+1+1)} + \frac{a+1+1}{(1+b+c)(a+1+1)} + \frac{b+1+1}{(1+a+c)(b+1+1)} \leq \frac{a+b+c+6}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}$$

Još preostaje dokati

$$\frac{a+b+c+6}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2} \leq 1 \iff a+b+c+6 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \iff 3 \leq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

No, po A-G nejednakosti i iz uvjeta $abc = 1$ znamo da vrijedi:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3$$

Ovime je tvrdnja zadatka dokazana.

3. **Zdravko Cvetkovski, Inequalities, Exercise 4.5**

4.

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \iff \frac{\sqrt{x(y+z)(z+x)} + \sqrt{y(x+y)(z+x)} + \sqrt{z(x+y)(y+z)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Sada ćemo primijeniti CSB nejednakost na nazivnik na način da ćemo zapisati: $a_1 = \sqrt{x(y+z)}$, $a_2 = \sqrt{y(z+x)}$, $a_3 = \sqrt{z(x+y)}$, $b_1 = \sqrt{z+x}$, $b_2 = \sqrt{x+y}$, $b_3 = \sqrt{y+z}$. Sada imamo:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}$$

, to jest:

$$\frac{\sqrt{x(y+z)(z+x)} + \sqrt{y(x+y)(z+x)} + \sqrt{z(x+y)(y+z)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \frac{\sqrt{4(x+y+z)(xy+yz+xz)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

Preostaje dokazati

$$2\sqrt{\frac{\sum_{sym} x^2 y + 3xyz}{\sum_{sym} x^2 y + 2xyz}} = 2\sqrt{1 + \frac{xyz}{\sum_{sym} x^2 y + 2xyz}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ta nejednakost vrijedi jer je

$$\frac{xyz}{\sum_{sym} x^2 y + 2xyz} \leq \frac{1}{8} \iff \sum_{sym} x^2 y \geq 6xyz$$

što vrijedi zbog A-G nejednakosti.

5. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\min(a, b, c) \leq b \leq \max(a, b, c)$. Iz toga slijedi: $(b-a)(b-c) \leq 0$ to jest $b^2 + ac \leq b(a+c)$. Sada imamo:

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc = a^2b + c(b^2 + ca) + abc \leq a^2b + 2abc + bc^2 = b(a+c)^2 = 4b\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \leq 4\left(\frac{b+2*\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3 = 4$$

Pri čemu smo u zadnjem koraku koristili A-G nejednakost i uvjet iz zadatka da je $a+b+c=3$, a u drugom koraku ranije dobivenu nejednakost $b^2 + ac \leq b(a+c)$.

6.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc} \\ \Leftrightarrow & \frac{abc}{a^3+b^3+abc} + \frac{abc}{b^3+c^3+abc} + \frac{abc}{c^3+a^3+abc} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{2a^3+2b^3}{a^3+b^3+abc} + 1 - \frac{2b^3+2c^3}{b^3+c^3+abc} + 1 - \frac{2a^3+2c^3}{a^3+c^3+abc} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3+b^3}{a^3+b^3+abc} + \frac{b^3+c^3}{b^3+c^3+abc} + \frac{a^3+c^3}{a^3+c^3+abc} \geq 2 \end{aligned}$$

Tvrdimo da vrijedi:

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+b^3+abc} \geq \frac{a+b}{a+b+c}$$

Imamo:

$$\begin{aligned} & \frac{a^3+b^3}{a^3+b^3+abc} \geq \frac{a+b}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow & (a^3+b^3)(a+b+c) \geq (a+b)(a^3+b^3+abc) \\ \Leftrightarrow & ca^3+cb^3 \geq a^2bc+ab^2c \\ \Leftrightarrow & c(a-b)^2(a+b) \geq 0 \end{aligned}$$

S obzirom da zadnja nejednakost očito vrijedi, tvrdnja je dokazana. Sada primjenom te tvrdnje na sva tri pribrojnika dobivamo:

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+b^3+abc} + \frac{b^3+c^3}{b^3+c^3+abc} + \frac{a^3+c^3}{a^3+c^3+abc} \geq \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} = 2$$

7. Zdravko Cvetkovski, Inequalities, Exercise 4.19

8. HMOD 2021., prvi zadatak

9. EGMO 2020., drugi zadatak

10. Zdravko Cvetkovski, Inequalities, Exercise 4.13

11. Prvo dokažimo sljedeću lemu:

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$$

Po CSB nejednakosti imamo: $(1+x)^2 \leq (1+xy)(1+\frac{x}{y})$. Iz toga slijedi:

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{(1+xy)(1+\frac{x}{y})} + \frac{1}{(1+xy)(1+\frac{y}{x})} = \frac{1}{1+xy}$$

Sada imamo:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+cd} = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+\frac{1}{ab}} = 1$$