MetaMath – Nejednakosti

Andrija Mandić

26. rujna 2022.

1 Primjeri

Zadatak 1. *Dokažite nejednakost:*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Jedno od rješenja je svođenje na osnovnu nejednakost realnih brojeva: $a^2 \geq 0$ za sve realne brojeve a. Dokažimo da vrijedi $x^2+y^2 \geq 2xy$. Imamo redom niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \geq 2xy \\ \iff & x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ \iff & (x-y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Kako je posljednja nejednakost istinita, zaključujemo da vrijedi i $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Analogno dobivamo:

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &\geq 2yz \\ z^2 + x^2 &\geq 2zx. \end{aligned}$$

Zbrojimo li tri dobivene nejednakosti dobivamo:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx.$$

Dijeljenjem s 2 dobijemo točno traženu nejednakost.

Drugo rješenje može biti iskoristi AG nejednakost. Kako je $|a|^2 = a^2$, $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$ za sve realne brojeve a, vrijedi:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} \overset{AG}{\geq} \sqrt{|x|^2 \cdot |y|^2} = |xy| \geq xy.$$

Sasvim identično dobivamo nejednakosti:

$$\frac{y^2+z^2}{2} \geq yz,$$
$$\frac{z^2+x^2}{2} \geq zx.$$

Zbrajanjem triju nejednakosti dobijemo $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ što je i trebalo dokazati. $\square$

Zadatak 2. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, dokažite da je:*

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Dokaz. Poznato je da u trokutu vrijedi nejednakost: zbroj duljina dviju stranica je strogo veća od duljine treće stranice, što se naziva i *nejednakost trokuta*. Stoga su svi nazivnici u traženoj nejednakosti dobro definirani (različiti od nule) i pozitivni. Uvedimo **supstituciju**:

$$\begin{aligned} x &= b+c-a \\ y &= c+a-b \\ z &= a+b-c, \end{aligned}$$

iz čega dobivamo

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{z+x}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}.$$

Označimo s LHS lijevu stranu početne tražene nejednakosti. Vrijedi:

$$LHS = \frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z}.$$

Postoji više načina kako dokazati da je dobiveni izraz veći ili jednak od 3.

Prvi način:

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \\ &\overset{AG}{\geq} \frac{1}{2}\left(2 \cdot \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}}\right) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Drugi način:

$$\begin{aligned} 2LHS &= \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \\ 2LHS + 3 &= \frac{y+z}{x} + 1 + \frac{z+x}{y} + 1 + \frac{x+y}{z} + 1 \\ &= (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Primijetimo što dobivamo iz aritmetičko harmonijske sredine:

$$\frac{x+y+z}{3} \stackrel{AH}{\geq} \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

iz čega slijedi

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Ova nejednakost može se dobiti i iz CSB nejednakosti:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \stackrel{CSB}{\geq} \left(\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+\sqrt{y\cdot\frac{1}{y}}+\sqrt{z\cdot\frac{1}{z}}\right)^2 = 9$$

Konačno, imamo:

$$2LHS + 3 = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Iz posljednjeg zaključujemo $LHS \geq 3$ čime je tražena nejednakost dokazana. □

Zadatak 3 (Nesbittova nejednakost)**.** *Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Dokaz. Primjenom CSB nejednakosti dobivamo:

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\cdot(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)) \stackrel{CSB}{\geq} (a+b+c)^2.$$

Označimo s LHS lijevi izraz u traženoj nejednakosti, tj.

$$LHS = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Iz dobivene nejednakosti zaključujemo:

$$LHS \cdot 2(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)^2.$$

Nadalje, imamo:

$$\begin{aligned}
LHS &\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{2(ab+bc+ca)} \\
&\geq \frac{ab+bc+ca+2ab+2bc+2ca}{2(ab+bc+ca)} \\
&= \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost vrijedi iz već dokazane nejednakosti iz Primjera 1, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. S time smo dobili $LHS \geq \frac{3}{2}$ što je i trebalo dokazati.

Drugi dokaz.

Neka je LHS isti izraz kao u prvom rješenju (lijeva strana tražene nejednakosti). Promotrimo izraz:

$$\begin{aligned}
LHS+3 &= \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1 \\
&= \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \\
&= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \\
&\overset{CSB}{\geq} \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{b+c}{b+c}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+a}}+\sqrt{\frac{a+b}{a+b}}\right)^2 \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Dobili smo $LHS+3 \geq \frac{9}{2}$, iz čega slijedi $LHS \geq \frac{3}{2}$.

Umjesto CSB nejednakosti u zadnjem koraku mogli smo koristiti i AH nejednakost. Kako su $a,b,c>0$ vrijedi:

$$\frac{(b+c)+(c+a)+(a+b)}{3} \overset{AH}{\geq} \frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}},$$

iz čega zaključujemo

$$((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9.$$

□

2 Osnovni lanac

Zadatak 4. *Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokažite nejednakost:*

$$\frac{a^2}{4}+b^2+c^2 \geq ab-ac+2bc.$$

Dokaz. Transformirajmo danu nejednakost na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2}{4}+b^2+c^2 \geq ab-ac+2bc \quad / \cdot 4 \\
\iff\ & a^2+4b^2+4c^2-4ab+4ac+8bc \geq 0 \\
\iff\ & (a-2b+2c)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Kako su sve tri nejednakosti ekvivalentne, te su kvadrati realnih brojeva uvijek nenegativni, zaključujemo da vrijedi tražena nejednakost. □

Zadatak 5. *Dokažite da za proizvoljne realne brojeve x, y, z vrijedi:*

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
& x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1) \\
\Longleftrightarrow \quad & x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x^2y^2 - 2x^2 + 2xz + 2x \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2 - 2x^2y^2 + y^4 + x^2 - 2xz + z^2 + x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & (x^2 - y^2)^2 + (x - z)^2 + (x - 1)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

□

Zadatak 6. *Dokažite da za proizvoljne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:*

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

Dokaz. Prvo rješenje.

Primjenom AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \overset{A-G}{\geq} \sqrt{|ab|^2} \geq ab, \quad \frac{a^2 + 1}{2} \overset{A-G}{\geq} \sqrt{|a|^2} \geq a, \quad \frac{1 + b^2}{2} \overset{A-G}{\geq} \sqrt{|b|^2} \geq b.$$

Ovdje smo koristili da je $x^2 = |x|^2$ (što nam treba za nenegativnost i primjenu AG nejednakosti) te činjenicu da je $|x| \geq x$ za sve realne brojeve x.

Zbrajanjem triju nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 + 1}{2} + \frac{1 + b^2}{2} &\geq ab + a + b \\
a^2 + b^2 + 1 &\geq ab + a + b,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b &= \frac{1}{2}\left[(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2\right] \geq 0,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi tražena nejednakost. □

Zadatak 7. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost:*

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Dokaz. Ideja je primijeniti AG nejednakost na svaki od pribrojnika na lijevoj strani nejednakosti. Promotrimo pribrojnik $\frac{a^3}{bc}$. Kako bi se riješili nazivnika bc, primijenimo aritmetičko geometrijsku nejednakost na sljedeći način:

$$\frac{a^3}{bc} + b + c \overset{AG}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} = 3a.$$

Sasvim analogno dobijemo i:

$$\begin{aligned} \frac{b^3}{ca} + c + a &\overset{AG}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^3}{ca} \cdot c \cdot a} = 3b, \\ \frac{c^3}{ab} + a + b &\overset{AG}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c^3}{ab} \cdot a \cdot b} = 3c. \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivenih nejednakosti dobijemo:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2(a+b+c) \geq 3(a+b+c),$$

što dokazuje početnu nejednakost. □

Zadatak 8. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta. Dokažite nejednakost:*

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Dokaz. Kako su a, b, c duljine stranica trokuta, po nejednakosti trokuta vrijedi da su svi nazivnici u lijevoj strani tražene nejednakosti strogo pozitivni. Kako imamo u zadatku duljine stranica, iskoristimo često korištenu supstituciju:

$$x = b + c - a, \quad y = c + a - b, \quad z = a + b - c.$$

Po gornjoj argumentaciji imamo $x, y, z > 0$. Izražavajući a, b, c preko x, y, z dobivamo:

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{x+z}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}.$$

Uvrštavajući navedene izraze u početnu nejednakost dobivamo ekvivalentnu nejednakost koju je potrebno dokazati:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z} + \frac{2}{x+y}.$$

Ovdje postoji više načina kako pristupiti rješavanju. Prvi način je da primijetimo kako se pojavljuju izrazi poput zbroja (npr. $x+y$) i zbroja recipročnih vrijednosti (npr. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$). Kako su $x, y, z > 0$, ovo sve bi nas trebalo asocirati na primjenu aritmetičko harmonijske nejednakosti. Naime, AH nejednakost daje:

$$\begin{aligned} &\frac{x+y}{2} \overset{AH}{\geq} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \frac{2}{x+y}. \end{aligned}$$

Ovdje smo mogli i direktno primijeniti AH nejednakost nad pozitivnim realnim brojevima $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{y}$. Analogno dobivamo i

$$\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{2} \geq \frac{2}{y+z}, \quad \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}{2} \geq \frac{2}{z+x}.$$

Konačno, kad zbrojimo sve tri navedene nejednakosti dobijemo rješenje:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}+\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{2}+\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}{2} \geq \frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}+\frac{2}{x+y}.$$

Ukoliko nam AH nejednakost ne padne na pamet, rješenje možemo dobiti i koristeći dva puta AG nejednakost. Vrijedi:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \overset{AG}{\geq} \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Nadalje,

$$\frac{x+y}{2} \overset{AG}{\geq} \sqrt{xy} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{x+y}.$$

Kombinirajući prethodne dvije nejednakosti zaključujemo:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{x+y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \geq \frac{2}{x+y}.$$

Daljnji postupak je identičan kao u prvom dijelu rješenja kod korištenja AH nejednakosti.

□

3 Ozbiljniji lanac

Zadatak 9. *Neka su $x, y, z > 0$. Dokažite da vrijedi:*

$$\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx} \leq 2(x+y+z).$$

Dokaz. Promotrimo traženu nejednakost nakon faktorizacije izraza pod korijenima:

$$\sqrt{x(3x+y)}+\sqrt{y(3y+z)}+\sqrt{z(3z+x)} \leq 2(x+y+z).$$

Pokušajmo primijeniti CSB nejednakost na način da pronađemo gornju ogradu za lijevu stranu početne nejednakosti. Imamo:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)\cdot((3x+y)+(3y+z)+(3z+x)) &\overset{CSB}{\geq} \left(\sqrt{x(3x+y)}+\sqrt{y(3y+z)}+\sqrt{z(3z+x)}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad 4(x+y+z)^2 &\geq \left(\sqrt{x(3x+y)}+\sqrt{y(3y+z)}+\sqrt{z(3z+x)}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad 2(x+y+z) &\geq \sqrt{x(3x+y)}+\sqrt{y(3y+z)}+\sqrt{z(3z+x)},
\end{aligned}$$

čime je dokazana tražena nejednakost. □

Zadatak 10. *Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$ dokažite nejednakost:*

$$ab + bc + ca \geq 9abc.$$

Dokaz. Promotrimo traženu nejednakost. S lijeve strane je polinom drugog stupnja (u tri varijable – a,b,c), dok je s desne strane polinom trećeg stupnja. Ukoliko je to moguće, često se kao dobra ideja pokazuje *homogenizacija* nejednakosti, tj. da pretvorimo obje strane nejednakosti u polinom istog stupnja (svi članovi su jednog, najvišeg stupnja). Konkretno, u ovom slučaju bi htjeli lijevu stranu naše nejednakosti pretvoriti u polinom trećeg stupnja. To ćemo najlakše ostvariti ukoliko ju pomnožimo s $a+b+c$, što znamo da je jednako 1. Označimo lijevu stranu s $LHS = ab + bc + ca$. Imamo:

$$\begin{aligned} LHS = LHS \cdot 1 &= (ab + bc + ca)(a + b + c) \\ &= a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + c^2a \\ &= a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 3abc. \end{aligned}$$

Kako želimo dokazati $LHS \geq 9abc$, ideja je dobiveni izraz ograničiti odozdo s abc. To ćemo postići korištenjem AG nejednakosti kombinirajući odgovarajuće izraze. Po aritmetičko geometrijskoj nejednakosti vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} &\overset{AG}{\geq} \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc, \\ \frac{b^2a + c^2b + a^2c}{3} &\overset{AG}{\geq} \sqrt[3]{b^2a \cdot c^2b \cdot a^2c} = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc. \end{aligned}$$

Uvjeti AG nejednakosti su ispunjeni pošto su a, b, c pozitivni realni brojevi. Vratimo se na gore dobivenu jednakosti:

$$\begin{aligned} LHS &= a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 3abc \\ &= (a^2b + b^2c + c^2a) + (b^2a + c^2b + a^2c) + 3abc \\ &\geq 3abc + 3abc + 3abc = 9abc. \end{aligned}$$

Time smo dokazali traženu nejednakost. □

Zadatak 11. *Neka su a_1, a_2, a_3, a_4 i b_1, b_2, b_3, b_4 pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi nejednakost:*

$$\left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \frac{1}{a_3b_3} + \frac{1}{a_4b_4}\right) \cdot \left((a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + (a_3+b_3)^2 + (a_4+b_4)^2\right) \geq 64.$$

Dokaz. Nejednakost ćemo dokazati primjenom CSB i AG nejednakosti. Krenimo:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \frac{1}{a_3b_3} + \frac{1}{a_4b_4}\right) \cdot \left((a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + (a_3+b_3)^2 + (a_4+b_4)^2\right) \\ &\overset{CSB}{\geq} \left(\frac{a_1+b_1}{\sqrt{a_1b_1}} + \frac{a_2+b_2}{\sqrt{a_2b_2}} + \frac{a_3+b_3}{\sqrt{a_3b_3}} + \frac{a_4+b_4}{\sqrt{a_4b_4}}\right)^2 \\ &\overset{AG}{\geq} \left(\frac{2\sqrt{a_1b_1}}{\sqrt{a_1b_1}} + \frac{2\sqrt{a_2b_2}}{\sqrt{a_2b_2}} + \frac{2\sqrt{a_3b_3}}{\sqrt{a_3b_3}} + \frac{2\sqrt{a_4b_4}}{\sqrt{a_4b_4}}\right)^2 \\ &= 8^2 = 64 \end{aligned}$$

□

Zadatak 12. *Neka su* a, b, c *pozitivni realni brojevi takvi da je* $abc = 1$. *Dokažite:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

Dokaz. Ideja za početak rješenja može biti pronaći neki izraz u ovisnosti o $a + b + c$ te ga ograničiti odozgo. Pošto se na lijevoj strani željene nejednakosti nalaze kvadrati vrijednosti a, b, c promotrimo izraz $(a + b + c)^2$. Imamo:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)\\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)\\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2).\end{aligned}$$

Nejednakost $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ je dokazana u Primjeru 1. Lako se dokaže svođenjem na kvadrate ili pomoću AG nejednakosti. Naime, $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. Analogno se dobije i za bc i ca, te se zbrajanjem dobije korištena nejednakost.

Nadalje imamo:

$$\begin{aligned}3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2\\ &= (a + b + c)(a + b + c)\\ &\overset{AG}{\geq} (a + b + c) \cdot 3\sqrt[3]{abc}\\ &= 3(a + b + c),\end{aligned}$$

iz čega zaključujemo $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje: Na lijevoj strani imamo a^2 a na lijevoj a, pa nam AG nejednakost može pasti na pamet: $\frac{a^2+1}{2} \geq a$. Motivirani time, imamo:

$$\begin{aligned}a^2 + 1 + b^2 + 1 + c^2 + 1 &\overset{AG}{\geq} 2a + 2b + 2c\\ &= a + b + c + (a + b + c)\\ &\overset{AG}{\geq} a + b + c + 3\sqrt[3]{abc}\\ &= a + b + c + 3,\end{aligned}$$

čime je dokazana početna nejednakost. □

4 Još ozbiljniji lanac

Zadatak 13. *Neka su* $a, b, c > 0$ *realni brojevi. Dokažite da vrijedi nejednakost:*

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 3.$$

Dokaz. Označimo lijevu stranu nejednakosti s LHS. Dokazujemo $LHS \geq 3$. Transformirajmo LHS u malo prikladniji oblik:

$$
\begin{aligned}
LHS &= \left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2} \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{8a^3}{2a(b+c)^2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{8b^3}{2b(c+a)^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{8c^3}{2c(a+b)^2}\right)^2} \\
&= \frac{2a}{\sqrt[3]{2a(b+c)^2}} + \frac{2b}{\sqrt[3]{2b(c+a)^2}} + \frac{2c}{\sqrt[3]{2c(a+b)^2}}.
\end{aligned}
$$

Htjeli bi dobiti neku donju ogradu za LHS ($LHS \geq$ neki izraz). To možemo postići na dva načina: pronaći donju ogradu za brojnik (npr. $2a \geq$ neki izraz) ili pronaći gornju ogradu za nazivnik (npr. $\sqrt[3]{2a(b+c)^2} \leq$ neki izraz).

Promotrimo ovaj drugi opisani pristup. Tražimo izraz koji je $\geq \sqrt[3]{2a(b+c)^2}$. Kako nas desna strana podsjeća na geometrijsku sredinu, pokušajmo s AG nejednakošću. Brojevi a, b, c su pozitivni realni stoga vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(2a)+(b+c)+(b+c)}{3} \overset{AG}{\geq} \sqrt[3]{2a(b+c)^2} \\
\iff \quad & \frac{1}{\sqrt[3]{2a(b+c)^2}} \geq \frac{3}{2a+(b+c)+(b+c)} \\
\iff \quad & \frac{1}{\sqrt[3]{2a(b+c)^2}} \geq \frac{3}{2(a+b+c)}.
\end{aligned}
$$

Sasvim analogno dobiju se i:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{2b(c+a)^2}} &\geq \frac{3}{2(a+b+c)}, \\
\frac{1}{\sqrt[3]{2c(a+b)^2}} &\geq \frac{3}{2(a+b+c)}.
\end{aligned}
$$

Iskoristimo sada dobivene nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
LHS &= \frac{2a}{\sqrt[3]{2a(b+c)^2}} + \frac{2b}{\sqrt[3]{2b(c+a)^2}} + \frac{2c}{\sqrt[3]{2c(a+b)^2}} \\
&\geq \frac{6a}{2(a+b+c)} + \frac{6b}{2(a+b+c)} + \frac{6c}{2(a+b+c)} = 3.
\end{aligned}
$$

Time je dokazana početna nejednakost za sve pozitivne realne brojeve a, b, c. $\square$

Zadatak 14. *Neka su zadani $x, y, z > 0$ takvi da vrijedi $xy + yz + zx = x + y + z$. Dokažite da vrijedi:*

$$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leq 1.$$

Dokaz. Ideja je pronaći donju ogradu za nazivnike iz lijeve strane početne nejednakosti. Na zgodan način možemo primijeniti *CSB* nejednakost:

$$\begin{aligned} & (x^2+y+1)(1+y+z^2) \overset{CSB}{\geq} (x+y+z)^2 \\ \iff \quad & \frac{1}{x^2+y+1} \leq \frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}. \end{aligned}$$

Kako nam padne na pamet pomnožiti nazivnik s $(1+y+z^2)$? Pokušavamo iskoristiti *CSB* nejednakost na način $(x^2+y+1) \cdot izraz_a \geq izraz_b^2$. Nakon što uzmemo recipročne vrijednosti ove nejednakosti, vidimo da bi htjeli da $izraz_b$ po mogućnosti bude neka konstanta za sva tri nazivnika iz početne nejednakosti. Stoga, $izraz_a$ naštimavamo tako da $izraz_b$ bude $(x+y+z)$. Sasvim analogno dobijemo:

$$\frac{1}{y^2+z+1} \leq \frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2}, \quad \frac{1}{z^2+x+1} \leq \frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}.$$

Zbrajajući dobivene nejednakosti imamo:

$$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leq \frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

Ukoliko dokažemo da je desna strana gornje nejednakosti manja ili jednaka 1, dokazali smo zadatak. Transformirajmo željenu nejednakost:

$$\begin{aligned} & \frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2} \leq 1 \\ \iff \quad & 3+x+y+z+x^2+y^2+z^2 \leq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \\ \iff \quad & xy+yz+zx \geq 3. \end{aligned}$$

U posljednjem koraku smo iskoristili uvjet zadatka $xy+yz+zx = x+y+z$. Ponovimo, ukoliko dokažemo gornju nejednakost dokazali smo i početnu. Vrijedi:

$$(xy+yz+zx)^2 = (x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx).$$

Prva jednakost je uvjet zadatka, dok je posljednji korak poznata nejednakost $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$. Dokaz se nalazi u Primjeru 1, te se dobije koristeći AG nejednakost ($\frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2) \geq xy$, analogno za yz, zx te sumiranje). Iz gornjeg niza jednakosti i zadnje nejednakosti, dijeljenjem s pozitivnim brojem $xy+yz+zx$ dobivamo $xy+yz+zx \geq 3$, čime je početna željena nejednakost dokazana. $\square$