MetaMath - Algebarski izrazi i faktorizacija

Josip Đurinić

October 3, 2022

U zadatcima koristiti ćemo se sljedećim formulama;

*kvadrat binoma zboja $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

*kvadrat binoma razlike (a - b)$^2 = a^2 - 2ab + b^2$

*kvadrat trinoma (a + b + c)$^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

*kub binoma zbroja (a + b)$^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

*kub binoma razlike (a - b)$^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

*razlika kvadrata (a - b)(a + b) = a$^2 - b^2$

*razlika kubova (a - b)(a$^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

*zbroj kubova (a + b)(a$^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

RASTAV NA FAKTORE

Rastaviti izraz na faktore znači napisati ga kao produkt od nekoliko faktora. Navedeno možemo učiniti na nekoliko različitih načina, primjerice izlučivanjem zajedničnog faktora, grupiranjem članova ili rastavom kvadratnog trinoma na faktore.

POLAZNI PRIMJERI;

Primjer 1. Dokažite da iz a + b + c = 0 slijedi: a$^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

RJEŠENJE. Za početak potrebno je prvu jednakost kvadrirati;

$$a + b + c = 0 / ()^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 0$$

Zatim na desnoj strani ostavimo samo kvadrate kako bismo jednakost mogli opet kvadrirati;

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2ab - 2bc - 2ac / ()^2$$
$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2)$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 4 \cdot 2abc(a + b + c)$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 8abc(a + b + c)$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

Primjer 2. Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi $x + y = 1$ i $x^3 + y^3 = 13$. Koliko je $x^2 + y^2$?

Pošto u zadatku imamo zadan zbroj kubova raspisati ćemo formulu za kub binoma zbroja kako bismo kasnije zadane jednakosti mogli uvrstiti u nju.

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$(x + y)^3 - (x^3 + y^3) = 3xy(x + y)$$

Sada možemo uvrstiti dane jednakosti iz zadatka.

$$\begin{aligned} 1^3 - 13 &= 3xy \cdot 1 \\ 3xy &= -12 / : 3 \\ xy &= -4 \end{aligned}$$

Sada zamijetimo kako nam se $x^2 + y^2$ nalazi u formuli za kvadrat zbroja te imamo

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Uvrsimo ono što znamo i imamo;

$$1^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot (-4) \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 + 8 = 9$$

Primjer 3. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24$, pri čemu su a, b i c realni brojevi, te odredi a, b i c za koje se ta vrijednost postiže.

RJEŠENJE.

Zadani izraz potrebno je zapisati na sljedeći način;

$$\begin{aligned} a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24 &= (a^2 - 4ab + 4b^2) + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 \\ &= (a - 2b)^2 + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 \\ &= (a - 2b)^2 + b^2 - 4bc + (4c^2 + 4c^2) - 8c + 4 + 20 \\ &= (a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 + 20 \end{aligned}$$

Vidljivo je kako je svaki od kvadriranih izraza veći ili jednak od 0 te slijedi;

$$(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 + 20 \geq 20$$

Zaključujemo kako je najmanja vrijednost koju izraz može postići 20, a to će biti onda kada su kvadrirani izrazi jednaki 0.

$$\begin{aligned} &a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a = 4 \\ &b - 2c = 0 \Rightarrow b = 2c \Rightarrow b = 2 \\ &2c - 2 = 0 \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

Zadatak 1.Dokaži da zbroj kvadrata triju uzastopnih cijelih brojeva pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2.

Za početak zapisati ćemo zbroj kvadrata triju uzastopnih brojeva;

$$\begin{aligned} (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 &= n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 \\ &= 3n^2 + 2 \end{aligned}$$

Zadatak 2.Dokaži da je umnožak četiriju uzastopnih cijelih brojeva uvećan za 1 potpuni kvadrat.

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

Zadatak 3. Faktorizirajte izraz. x^4-8x^2+4

RJEŠENJE.

$$\begin{aligned} x^4-8x^2+4 &= (x^2)^2+2^2-8x^2 \\ &= (x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 2-2\cdot x^2\cdot 2+2^2-8x^2 \\ &= [(x^2)^2-4x^2+4]-8x^2+4x^2 \\ &= (x^2-2)^2-4x^2 \\ &= (x^2-2+2x)(x^2-2-2x) \\ &= (x^2+2x-2)(x^2-2x-2) \end{aligned}$$

Zadatak 4. Odredite vrijednost izraza.

$$\frac{20182019^2-20182018^2}{20182018\cdot 20182020-20182017\cdot 20182019}$$

RJEŠENJE.

Uvodimo nepoznanicu $x=20182018$ te sada zadani izraz izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2-x^2}{x\cdot(x+2)-(x-1)\cdot(x+1)} &= \frac{(x+1-x)(x+1+x)}{x^2+2x-x^2+1} \\ &= \frac{2x+1}{x^2+2x-x^2+1} \\ &= \frac{2x+1}{2x+1}=1 \end{aligned}$$

Zadatak 5. Neka su a i b različiti realni brojevi i neka je $s=a-b$ i $t=a^3-b^3$.

Pomoću s i t izrazi $(a+b)^2$.

RJEŠENJE.
Raspišemo izraz kojeg je potrebno prikazati pomoću s i t.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+ab+b^2+ab$$

Zatim faktoriziramo zadane jednakosti;

$$t=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=s(a^2+ab+b^2)$$

Iz navedenog slijedi;

$$a^2+ab+b^2=\frac{t}{s}$$

Zapazimo da nam nedostaje izraz kojim ćemo zamijeniti ab.

Kubirajmo $s = a - b$;

$$s^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a^3 - b^3) - 3ab(a - b) = t - 3abs$$

Izrazimo ab iz dobivene jednakosti.

$$ab = \frac{t - s^3}{3s}$$

Sada sve što imamo možemo uvrstiti u raspisan kvadrat zbroja.

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab = \frac{t}{s} + \frac{t - s^3}{3s} = \frac{4t - s^3}{3s}$$

Zadatak 6. Vrijedi da je $a + b = 4$ i $a^2 + b^2 = 14$. Odredite $a^3 + b^3$.

Prvo ćemo raspisati čemu je jednako $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Uvrstimo ono što nam je poznato;$a^3 + b^3 = 4 \cdot (14 - ab)$.

Vidimo kako nam nedostaje ab, no ako kvadriramo $a + b = 4$ moći ćemo izraziti ono što nam nedostaje.

$$\begin{aligned} a + b &= 4/()^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 16 \\ 14 + 2ab &= 16 \\ 2ab &= 2 \\ ab &= 1 \end{aligned}$$

U konačnici odbivamo; a$^3 + b^3 = 4 \cdot (14 - 1) = 4 \cdot 13 = 52$

Zadatak 7. Dokazati jednakost.

$$\frac{b^2c^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{c^2a^2}{(b - c)(b - a)} + \frac{a^2b^2}{(c - a)(c - b)} = ab + bc + ca$$

RJEŠENJE. Krećemo od lijeve strane, odnosno svodimo na najmanji zajednički višekratnik.

$$\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2b^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2a^2}{(b-c)[-(a-b)]}+\frac{a^2b^2}{[-(a-c)][-(b-c)]}$$

$$=\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}-\frac{c^2a^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b^2c^2(b-c)-c^2a^2(a-c)+a^2b^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b^2c^2(b-c)-c^2a^3+c^3a^2+a^3b^2-a^2b^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b^2c^2(b-c)+a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(b-c)[b^2c^2+a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b^2c^2+a^3b+a^3c-a^2b^2-a^2bc-a^2c^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$=\frac{(a^3b-a^2b^2)+(a^3c-a^2bc)+(b^2c^2-a^2c^2)}{(a-b)(a-c)}$$

$$=\frac{a^2b(a-b)+a^2c(a-b)-c^2(a-b)(a+b)}{(a-b)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2b+a^2c-c^2a-c^2b)}{(a-b)(a-c)}$$

Skratimo zajedničke faktore u brojniku i nazivniku te imamo;

$$=\frac{(a^2b-c^2b)+(a^2c-c^2a)}{a-c}$$
$$=\frac{b(a-c)(a+c)+ac(a-c)}{a-c}$$
$$=\frac{(a-c)(ab+bc+ac)}{a-c}$$
$$=ab+bc+ac$$

Zadatak 8. Postoje li realni brojevi x, y i z takvi da vrijedi:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=-5 \quad \text{i} \quad \frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}=8 \quad ?$$

Započnimo rješavanje na način da kvadriramo sljedeći izraz;

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)^2 &= \frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}+2\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}+\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}+\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x}\right)\\ &= \frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}+2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\\ &= 8+2\cdot(-5)=-2\end{aligned}$$

Pošto je rezultat u konačnici negativan broj zaključujemo da ne postoje takvi realni brojevi x, y i z za koje bi jednakosti vrijedile.

Zadatak 9.Dokaži da ne postoje pozitivni realni brojevi x i y za koje vrijedi

$$(x^3+y^3)(x^2+y^2)=2(x+y)=2.$$

RJEŠENJE.
Zamijetimo kako je $2(x+y)=2$ ustvari $x+y=1$.

Potom ćemo faktorizirati izraze iz zadatka;

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy\\ &= 1-2xy\\ x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)\\ &= 1\cdot(1-2xy-xy)\\ &= 1-3xy.\end{aligned}$$

Zatim dobivene jednakosti vratimo u početni izraz;

$$(1-3xy)(1-2xy)=(x^3+y^3)(x^2+y^2)=2$$

Pomnožimo lijevu stranu i dobivamo;

$$\begin{aligned}1-2xy-3xy+6x^2y^2 &= 2\\ 6x^2y^2-5xy-1 &= 0\end{aligned}$$

Faktorizirajmo izraz

$$(6xy+1)(xy-1)=0$$

Kako iz uvjeta zadatka slijedi da su x i y pozitivni brojevi zaključujemo kako je $6xy+1$ pozitivno i različito od 0.

Zato zaključujemo da je $xy-1=0$ te pišemo $xy=1$.

Iz $x+y=1$ izlučimo y te imamo $y=1-x$.

Uvrštavanjem dobivamo $x(1-x)=1$.

$$\begin{aligned} x - x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dopunjujemo do potpunog kvadrata i dobivamo;

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

Navedeno nema rješenje u skupu realnih brojeva pa zaključujemo da takvi x i y ne postoje.

DVA NAJTEŽA ZADATKA

Zadatak. Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2 \\ y^2 - z &= x^2 \\ z^2 - x &= y^2 \end{aligned}$$

RJEŠENJE.

Za početak zbrojimo sve tri jednakosti te imamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - y - z - x &= z^2 + x^2 + y^2 \\ -y - z - x &= 0 \qquad / \cdot (-1) \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Potom izlučimo primjerice z iz prethodne jednakosti te imamo $z = -x - y$ što uvrtimo u prvu jednakost

$$\begin{aligned} x^2 - y &= (-x-y)^2 \\ x^2 - y &= x^2 + 2xy + y^2 \\ 0 &= y^2 + y + 2xy \\ 0 &= y(y + 1 + 2x) \end{aligned}$$

Uviđamo da imamo dvije mogućnosti: $y = 0$ i $y + 1 + 2x = 0$.

Za $y = 0$ slijedi kako je $z = -x$, a uvrštavanjem u zadnju jednakost dobivamo $(-x)^2 - x = 0$.

$$\begin{gathered} x(x-1) = 0 \\ x = 0 \quad \text{ili} \quad x - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \quad \text{ili} \quad z = -1 \end{gathered}$$

Rješenje su: $(0,0,0)$ i $(1,0,-1)$.

Za $y=-2x-1$ slijedi kako je $z=x+1$. Uvrštavanjem u drugu jednakost dobivamo $-x-1=x^2$.

Izraz je potrebno faktorizirati te imamo;

$$\begin{aligned}
4x^2+4x+1-x-1 &= x^2\\
3x^2+3x &= 0\\
x(x+1) &= 0\\
x=0 \quad \text{ili} &\quad x+1=0\\
y=-1 \quad \text{ili} &\quad y=1\\
z=1 \quad \text{ili} &\quad z=0.
\end{aligned}$$

Rješenja su: $(0,-1,1)$ i $(-1,1,0)$.

Sva rješenja zadanoga sustava su: $(0,0,0),(1,0,-1),(0,-1,1)$ i $(-1,1,0)$.

Zadatak. Ako su x,y,z i w pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{x}{y+z+w}+\frac{y}{z+w+x}+\frac{z}{w+x+y}+\frac{w}{x+y+z}=1$$

odredi

$$\frac{x^2}{y+z+w}+\frac{y^2}{z+w+x}+\frac{z^2}{w+x+y}+\frac{w^2}{x+y+z}.$$

RJEŠENJE.
Zadanu početnu jednakost pomnožiti ćemo s $x+y+z+w$.

$$\frac{x^2+x(y+z+w)}{y+z+w}+\frac{y^2+y(x+z+w)}{z+w+x}+\frac{z^2+z(x+y+w)}{w+x+y}+\frac{w^2+w(x+y+z)}{x+y+z}=x+y+z+w$$

$$\frac{x^2}{y+z+w}+x+\frac{y^2}{z+w+x}+y+\frac{z^2}{w+x+y}+z+\frac{w^2}{x+y+z}+w=x+y+z+w$$

$$\frac{x^2}{y+z+w}+\frac{y^2}{z+w+x}+\frac{z^2}{w+x+y}+\frac{w^2}{x+y+z}=0$$