

Djeljivost

1. Teorijski uvod

Djeljivost je jedan od najosnovnijih, ali i najvažnijih pojmova u teoriji brojeva.

Definicija 1.1

Za brojeve $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, kažemo da a *dijeli* b i pišemo $a \mid b$ ako postoji cijeli broj k takav da je $b = ak$. Kažemo da je a *djelitelj* od b , odnosno da je b *višekratnik* od a .

Prisjetimo se i osnovnih pravila djeljivosti:

Teorem 1.2: Djeljivost s 2, 3, 4, 5, 8 i 9

- Broj je djeljiv s 2 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 2.
- Broj je djeljiv s 3 ako mu je zadnja zbroj znamenaka djeljiv s 3.
- Broj je djeljiv s 4 ako su mu posljednje dvije znamenke djeljive s 4.
- Broj je djeljiv s 5 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 5.
- Broj je djeljiv s 8 ako su mu posljednje tri znamenke djeljive s 8.
- Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Teorem 1.3: Teorem od dijeljenju s ostatkom

Za proizvoljan prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r$, $0 \leq r < a$

2. Zadaci

2.1. Uvodni zadaci

1. Pokaži da kvadrati brojeva mogu dati samo ostatak 0 ili 1 pri djeljenju s 3.
2. Pokaži da kvadrati brojeva mogu dati samo ostatak 0 ili 1 pri djeljenju s 4.
3. Pokaži da kvadrati brojeva mogu dati samo ostatak 0 ili 1 ili 4 pri djeljenju s 8.

4. Pokaži da kubovi brojeva mogu dati samo ostatke 1, 0 ili -1 pri djeljenu sa 7.
5. Pokaži da kubovi brojeva mogu dati samo ostatke 1, 0 ili -1 pri djeljenu sa 9.
6. Pokaži da četvrte potencije brojeva mogu dati samo ostatke 0 i 1 pri djeljenu s 5.

2.2. Lakši zadaci

7. (Školsko 2015. SŠ1A 1. zadatak) Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva 1122.
8. (Školsko 2017. SŠ1A 3. zadatak) Odredi znamenke a i b tako da broj $\overline{a2017b}$ bude djeljiv s 72.
9. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve djeljive s 16 oblika $\overline{abab}$.
10. Odredi sve moguće vrijednosti od $D(12, 3n + 2)$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Teži zadaci

11. (Školsko 2017. SŠ3A 4. zadatak) Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu $mn^2 = 100(n + 1)$.
12. Pronađi sve parove (p, n) gdje je p prosti broj, a n prirodni broj takve da je vrijedi $p^3 + 1 = n^2$.
13. Pokaži da za prirodne brojeve a i b vrijedi $D(a, b) \cdot V(a, b) = ab$.



Trenutni i bivši učenici Gimnazije Lucijana Vranjanina
Kontaktirajte nas na glv.forces@gmail.com

